MNB Füzetek
1998/2

Csajbók Attila:

ZÉRÓ-KUPON HOZAMGÖRBE BECSLÉSJEGYBANKI SZEMSZÖGBŐL

1998. március

ISSN 1219 9575

ISBN 963 9057 19 3

Online ISSN: 1585 5597

Csajbók Attila: Közgazdasági és kutatási főosztály, Monetáris államháztartási kutatási osztály, munkatárs
E-mail: csajboka@mnb.hu

E kiadványsorozat a Magyar Nemzeti Bankban készült elemző és kutató munkák eredményeit tartalmazza, és célja, hogy az olvasókat olyan észrevételekre ösztönözze, melyeket a szerzők felhasználhatnak további kutatásaikban. Az elemzések a szerzők véleményét tükrözik, s nem feltétlenül esnek egybe az MNB hivatalos véleményével.

Magyar Nemzeti Bank
1850 Budapest
Szabadság tér 8-9.
http://www.mnb.hu

TARTALOM:

Összefoglalás:

Az utóbbi években a fejlett országok jegybankjai körében egyre inkább megkülönböztetett figyelemmel fordulnak a viszonylag hatékony piacokkal rendelkező tőkepiaci javak árainak (*asset prices*) alakulása felé. Ezek az árak amellett, hogy magas frekvenciával és jó minőségben állnak rendelkezésre, olyan piacokon alakulnak ki, amelyek alapvetően előretekintő (*forward-looking*) jellegűek, szemben az áru- és munkaerőpiaccal, melyek esetében a múltbeli folyamatoknak feltehetően nagyobb befolyásuk van a jelenbeli árakra. Ezen tulajdonságok miatt a tőkepiaci javak árai kézenfekvő indikátort jelentenek a jegybank számára, hiszen a piaci várakozások illetve ezek monetáris politikai lépésekre való reakciója ezekben az árakban jelennek meg a leggyorsabban és vélhetően a legmegbízhatóbban[1].
Tekintettel arra, hogy Magyarországon az elmúlt években kialakult az államkötvények viszonylag likvid piaca, kézenfekvőnek tűnik, hogy ezen eszközök árából a monetáris hatóság minél több információt próbáljon kinyerni a piacnak a nominális kamatok illetve az infláció jövőbeli alakulására vonatkozó várakozásairól. A kötvényárakból akár a nominális kamat- akár az inflációs várakozásokra következtetni viszont módszertanilag egyáltalán nem egyszerű, illetve az ilyen következtetés számos implicit feltételezést tartalmaz. Az alábbi dolgozat legfőbb célja egyfelől annak bemutatása, hogy a legkomolyabb módszertani akadályon, a zéró-kupon hozamgörbe rekonstrukcióján milyen módszerekkel lehet és célszerű túljutni, másfelől az implicit feltételezések (elsősorban az ún. *várakozási hipotézis*) explicitté tétele, ezek jelentőségének hangsúlyozása.
A dolgozat felépítése a következő:
Az 1. fejezet 1-2. része a hozamgörbével kapcsolatos legfontosabb fogalmak ismertetése mellett a zéró-kupon hozamgörbét és a lejáratig számított hozamokból kalkulált ún. YTM-hozamgörbét hasonlítja össze, felhívva a figyelmet az utóbbi számos elméleti hátrányára. Az 1.3 rész a monetáris politika számára elsődleges jelentőséggel bíró implikált forwardokat definiálja, illetve ezek értelmezését mutatja be. Az 1.4 rész tér ki azokra a feltételezésekre, melyek teljesülése szükséges feltétele annak, hogy a kötvényárakból a piac kamat- és inflációs várakozásaira lehessen következtetni.
A 2. fejezet a zéró-kupon hozamgörbe becslésének módszertanába próbál betekintést nyújtani, illetve a magyar adatokon alternatív módszerekkel elvégzett becsléseket veti össze. Ez a fejezet korábban önnálló dolgozatként született meg, melynek célja a különböző becslési módszerek közötti választás alátámasztása volt.
A 2.1 és 2.2 rész az általam használt két alapvető módszer-család: a polinomiális illesztés illetve az ún. kompakt függvényformák módszertanát ismerteti részletesen. A 2.3 rész a magyar hozamgörbe becslésekhez használt adatokkal foglalkozik. A 2.4 részben az egyes módszerek közötti választásnál figyelembe veendő szempontokat vesszük sorra, és ahol ez lehetséges, a magyar adatokon eddig elvégzett becslések alapján össze is hasonlítjuk az egyes módszereket az adott szempont alapján. A 2.5

[1] Bár az asset piacok valószínűleg a leghatékonyabbak, nem árt azonban figyelembe venni legalább két olyan elméleti eredményt, amely az asset price-ok viselkedésére vonatkozik. Az egyik ilyen elmélet szerint az asset árak a fundamentumok valamilyen sokkja után hajlamosak az új egyensúlyi értéken túllendülni (ez az ún. *overshooting*). A másik elmélet szerint még hatékony piacok mellett is kialakulhatnak a fundamentumoktól messze elszakadó asset árak (ld. *rational bubbles* irodalom).

rész tartalmazza az eddigi tapasztalatok figyelembe vételével a jövőben alkalmazandó módszerre vonatkozó javaslatot.
A 3. fejezet szintén egy korábban született, önálló dolgozat. Lényegében egy alkalmazás, mely a már rendelkezésre álló becsült zéró-kupon hozamok segítségével empirikusan is bemutatja az YTM hozamgörbék egy, az 1. fejezetben már ismertetett hátrányát. Konkrétan a Magyarországon széles körben elterjedt YTM-típusú hozamgörbében, az ÁKK benchmarkban jelen lévő, a zéró-kupon görbe negatív lejtése miatti torzítás kerül itt számszerűsítésre. Az eredmények a hosszabb lejáratokon szembetűnő torzításról árulkodnak, ami a zéró-kupon hozamgörbe becslésének és a további elemzésekben a benchmark helyett a zéró-kupon hozamok alkalmazásának szükségességét empirikusan is alátámasztja.

1. A hozamgörbe és jelentősége a monetáris politika számára

1.1 A hozamgörbe definíciója

A hozamgörbe legáltalánosabb definíciója szerint egy olyan függvény, amely minden egyes lejárathoz hozzárendeli a piac által arra a lejáratra elvárt hozamot. Legtöbbször különböző lejáratú, hitelviszonyt megtestesítő értékpapírok (kötvények, kincstárjegyek, stb.) piacon megfigyelhető hozamait használjuk hozamgörbe szerkesztésére. Fontos, hogy a szerkesztéshez használt értékpapírok ugyanabba a kockázati kategóriába essenek. Ez azt is jelenti, hogy elméletben minden kockázatszinthez külön hozamgörbe tartozik. A gyakorlatban a hozamgörbe-becslések általában egyetlen kockázati osztályra, az állampapírok körére koncentrálnak, amit magyaráz ezen értékpapírok gazdag lejárati struktúrája és általában likvid piaca.

1.2 Zéró-kupon- és YTM-hozamgörbék

A hozamgörbe fentebbi általános definíciója szűkíthető, mégpedig aszerint, hogy pontosan mit tekintünk egy adott lejárati időpontig tartó “hozam”-on. Ebben a tanulmányban a két legfontosabb lehetséges hozam-definícióval, illetve a belőlük származtatott hozamgörbékkel foglalkozunk: a lejáratig számított hozammal (*yield to maturity*, YTM) és a zéró-kupon hozammal. Látni fogjuk, hogy a lejáratig számított hozam alapján szerkesztett hozamgörbének - amit az egyszerűség kedvéért a továbbiakban YTM-hozamgörbének nevezünk - elméleti szempontból több gyenge pontja is van a zéró-kupon hozamgörbével szemben.
Amennyiben a (zéró-kupon) hozamgörbe ismert, azaz rendelkezünk a különböző lejáratokra a piac által a jelenben elvárt (spot-) kamatokkal, akkor a kötvény piaci ára cash-flow-jának jelenértékeként számítható. Egy $\boldsymbol{m}$ időszak múlva lejáró kamatozó kötvény esetében tehát a piaci ár:

$$\boldsymbol{P}=\frac{\boldsymbol{C}}{1+\boldsymbol{i}(1)}+\frac{\boldsymbol{C}}{\left(1+\boldsymbol{i}(2)\right)^{2}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{\boldsymbol{C}+\boldsymbol{R}}{\left(1+\boldsymbol{i}(\boldsymbol{m})\right)^{\boldsymbol{m}}} \qquad (1.1)$$

ahol:

$\boldsymbol{P}$: a kötvény piaci ára
$\boldsymbol{C}$: a kötvény névleges kamata (*coupon*)
$\boldsymbol{R}$: a kötvény névértéke (*redemption payment, principal*)
$\boldsymbol{i(j)}$: a piac által a $\boldsymbol{j}$-edik periódusig elvárt nominális spot kamat, éves szintre számítva

Az ***i(t), t=1,..,m*** függvény maga a zéró-kupon hozamgörbe. A piaci szereplőknek mindig van valamilyen elképzelésük a kamatok jövőbeli alakulásáról, azaz van egy becslésük a zéró-kupon hozamgörbéről, hiszen enélkül nem tudnának - az (1.1) képletet használva - kötvényeket árazni. A kötvények piaci ára tehát - implicit módon - mindig tartalmazza a zéró-kupon hozamgörbét. A zéró-kupon hozamgörbét konstruálni szándékozó elemző számára a problémát az jelenti, hogy a különböző lejáratokra elvárt kamatok közvetlenül nem figyelhetők meg[2], azaz az (1.1) képletből csak a kötvény piaci árát és cash-flow-ját ismerjük. Ezeket felhasználva egyetlen kötvényből csak a lejáratig számított hozam (ld. alább) számítható ki. Több - akár különböző lejáratú - kötvény árát és cash-flow-ját ismerve a zéró-kupon hozamgörbe is becsülhető. Hangsúlyozni kell azonban, hogy az így kapott zéró kupon hozamgörbe csak egy becslése a tényleges hozamgörbének; a kettő közötti különbség érzékeny a becslés során alkalmazott módszerekre és feltételezésekre.
A kötvény lejáratig számított hozamának nevezzük azt az átlagos, a kötvény hátralevő élettartamára vonatkozó kamatlábat, mellyel a kötvény cash-flow-ját diszkontálva a kapott jelenérték éppen megegyezik a kötvény aktuális piaci árával:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{C}}{1+\boldsymbol{y}(\boldsymbol{m})} + \frac{\boldsymbol{C}}{\left(1+\boldsymbol{y}(\boldsymbol{m})\right)^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\boldsymbol{C}+\boldsymbol{R}}{\left(1+\boldsymbol{y}(\boldsymbol{m})\right)^{\boldsymbol{m}}}\ , \tag{1.2}$$

ahol:

y(m) : az ***m*** lejáratú kötvény lejáratig számított hozama (*yield to maturity*, YTM).

Ahogy a fenti képletből látszik, a lejáratig számított hozam nem más mint a kötvény belső megtérülési rátája. Az (1.1) képlettel összehasonlítva látható, hogy az egyes tagok nevezőiben ezúttal mindenütt ugyanaz a hozam (*y*) szerepel. A képletből az is látszik, hogy a lejáratig számított hozam általában csak numerikus módszerekkel (iteratív eljárással) számítható ki.
Adott pillanatban a piacon megtalálható, különböző lejáratú kamatozó kötvények lejáratig számított hozamaiból szerkeszthető az YTM-hozamgörbe[3]. Hangsúlyozni kell, hogy az YTM-hozamgörbe nem a piaci szereplők különböző időtávokra vonatkozó diszkontfaktorait tükrözi, ezért tulajdonképpen nem is felel meg a hozamgörbe általunk korábban adott definíciójának. A gyakorlatban azért jut mégis szerephez, mert (durván) közelíti zéró-kupon görbét, viszont sokkal egyszerűbben előállítható.
Az YTM-hozamgörbével kapcsolatban több probléma is felmerül. Az első az ún. újrabefektetési kockázattal kapcsolatos probléma. Az YTM számításakor ugyanis implicit módon feltételeztük, hogy a kötvény vásárlója a lejárat előtt fizetett kamatokat mindenkor az YTM-mel azonos kamatszinten tudja újra befektetni. Ez a gyakorlatban természetesen nem feltétlenül igaz. Emiatt a lejáratig számított hozam általában nem egyezik meg a (lejáratig tartott) kötvényen realizált ex post hozammal, kivéve azt az esetet, ha a kamatszint a kötvény lejáratáig nem változott és végig az

[2] Kivéve természetesen azt az esetet, amikor minden egyes lejáratra létezik zéró-kupon kötvény. Ebben az esetben a zéró-kupon hozamokat egyszerűen a lejárat függvényében ábrázolva megkapjuk a hozamgörbét.
[3] Ebbe a kategóriába sorolható például az ÁKK napi (3, 6 és 12 hónapos, 2, 3 és 5 éves) referenciahozamaiból összeállított hozamgörbe.

YTM-mel egyezett meg, azaz ha az ex post hozamgörbe vízszintes. Az előbbi érvnek azonban a tulajdonképpeni (azaz ex ante) YTM-hozamgörbére nézve is van egy fontos implikációja. Az a paradox helyzet áll elő ugyanis, hogy az YTM-hozamgörbe csak akkor konzisztens (ti. az alapjául szolgáló YTM-ek számítása során használt feltételezéssel), ha vízszintes.

Az YTM hozamgörbével kapcsolatos második elméleti kritika szerint hibás az azonos lejáratú, de különböző cash-flow-val rendelkező instrumentumok esetében a különböző pénzáramlásokat ugyanazzal a lejáratig számított hozammal diszkontálni. Azonos lejáratú kötvények közül a magasabb névleges kamatot fizető kötvénynek nagyobb a lejáratig számított hozama (ez az ún. kupon-hatás). Emiatt az elméletileg helyes megoldás az lenne, ha a névleges kamatozás minden szintjéhez külön YTM-hozamgörbét számítanánk. A gyakorlatban ez persze problémát okoz, hiszen a piacon sokféle névleges kamat fordul elő, így egy-egy YTM-görbe becsléséhez kevés megfigyelés akadna. További problémát jelentene, hogy az egyes lejáratokhoz így több elvárt hozam is tartozna, és nem lenne egyértelmű, melyiket használjunk a további elemzésekhez.

Zéró-kupon hozamgörbével kapcsolatban egyik fentebb említett probléma sem merül fel. Hátránya viszont, hogy becslése meglehetősen bonyolult, és legtöbbször a diszkontfüggvény alakjára vonatkozó feltételezésen alapul. Eltérő feltételezett függvényalakok eltérő zéró-kupon görbéhez vezethetnek, azaz az eredmény nem minden esetben egyértelmű. Az említett hátrányokkal együtt, mind a közgazdasági szakirodalomban, mind a fejlett országok élvonalbeli üzleti szereplőinek *fixed income* elemzéseiben döntő a zéró-kupon hozamgörbe fölénye.

1.3 A hozamgörbe jelentősége a monetáris politika szempontjából

A monetáris politika indikátorai közül kiemelkedő jelentőségű lehet egy, a gazdasági szereplők inflációs várakozásait tükröző mutató, méghozzá két szempontból is: egyrészt a piac inflációs várakozását a jegybank saját modelljébe beépítve felhasználhatja a saját inflációs előrejelzése készítésében, másrészt a piaci várakozások és a bejelentett inflációs cél viszonyából következtetni lehet arra, hogy a piac mennyire ítéli hitelesnek a kitűzött inflációs célt.

A hozamgörbe jelentősége a monetáris politika számára abban áll, hogy belőle - bizonyos feltételek teljesülése esetén - következtetni lehet a gazdasági szereplőknek a nominális kamatok jövőbeni alakulására vonatkozó várakozásira, illetve - amennyiben néhány további feltétel is teljesül - az általuk különböző időtávokra várt átlagos inflációs rátákra. A hozamgörbe tehát egy fontos potenciális indikátor.

A hozamgörbéből egyértelműen származtatható az ún. implikált forward kamatok görbéje, tetszőleges hosszúságú (overnight, 1 hónapos, 1 éves) kamatokra. Mivel a hozamgörbéből bármely $\boldsymbol{t_1}$ és $\boldsymbol{t_2}$ ($\boldsymbol{t_2}>\boldsymbol{t_1}$) időszakra vonatkozó elvárt hozamok leolvashatók, ily módon bármely $\boldsymbol{t_1}$ és $\boldsymbol{t_2}$ periódus *közötti* időszakra is implikál egy adott jövőbeni kamatot a következő módon:

$$\left((1+\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{t}_2)\right)^{t_2-t_0} = \left((1+\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{t}_1)\right)^{t_1-t_0}\left(1+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2)\right)^{t_2-t_1}, \text{ ahol}$$

i(t₀, tᵢ) : az i-edik periódusig elvárt spot kamat

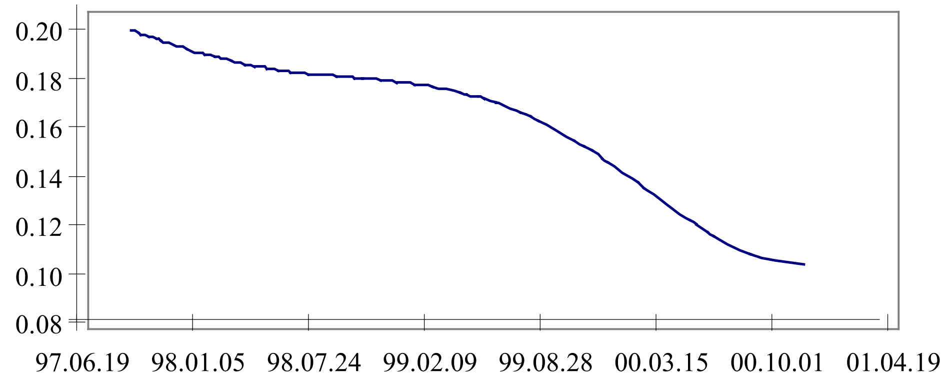
f(tᵢ, tⱼ) :. az i-edik periódus végétől a j-edik periódus végéig tartó időszakra vonatkozó implikált forward kamat

Ebből az implikált forward kamat a következőképp adódik:

$$f(t_1,t_2)=\left[\frac{\left((1+i(t_0,t_2)\right)^{t_2-t_0}}{\left((1+i(t_0,t_1)\right)^{t_1-t_0}}\right]^{\frac{1}{t_2-t_1}}-1$$

Ha a vizsgálni kívánt implikált forwardok hosszát (azaz a t_1 és t_2 közötti távolságot) rögzítjük - pl. 1 évben, ha az 1 éves forwardokra vagyunk kíváncsiak - és t_1-et végigfuttatjuk a rendelkezésre álló lejárati tartományon[4], akkor megkapjuk az implikált forward görbét. Ez a görbe azért különösen érdekes, mert - amennyiben a monetáris politika eszközei a rövidtávú kamatok - a piacnak magára a monetáris politika jövőbeni alakulására vonatkozó várakozását tükrözi, könnyen értelmezhető formában. Az 1.1 ábra a fentebb már bemutatott zéró-kupon hozamgörbe alapján számított 1 éves forwardokat mutatja. Az ábra a következőképp értelmezhető: a piaci szereplők 1997. szeptember 12-én a jövőbeni 1 éves hozamok lassú csökkenését várták nagyjából 1998 végéig, majd egy gyorsabb - évi kb. 300 bázispontos - csökkenést 1999-ben és 2000-ben egyaránt[5].

1. ábra: Implikált 1 éves forward kamatok, 1997. szept. 12.
hetedfokú polinomiális illesztés



Az implikált forwardok további jól hasznosítható tulajdonsága, hogy két ország implikált forward görbéjét egymásból kivonva megkapjuk a piac által a jelenben várt jövőbeli leértékelődés pályáját[6]. Ez különösen hasznos lehet rögzített árfolyampolitikát folytató országokban, hiszen a piac által várt jövőbeli leértékelésről ad képet, így akár spekulációs támadások előrejelzésében is szerephez juthat.

1.4 Milyen feltételek mellett használható a hozamgörbe indikátorként?

Ezeket a feltételeket két csoportba oszthatjuk. Az első ilyen csoport teljesülése esetén a hozamgörbéből kiolvashatók a nominális kamatok jövőbeli alakulására vonatkozó

[4] Természetesen t_1 maximális értéke a lejárati tartomány vége - 1 év, hiszen ennél későbbi időponthoz már nem találunk 1 évvel távolabb lévő t_2 párt.

[5] Ez az értelmezés, mint ahogy erre korábban már utaltunk, csak bizonyos feltételek (az ún. várakozási hipotézis, ld. 5. pont) teljesülése esetén helytálló.

[6] Itt is teljesülnie kell azonban egy feltételnek: a két ország pénznemében indifferens befektetők árfolyamkockázati prémiumai hasonló nagyságrendűek kell, hogy legyenek. Ebben az esetben ugyanis a prémiumok kiejtik egymást és a forward pályák különbsége tisztán a leértékelési várakozásokat tükrözi.

piaci várakozások. Ha a második csoportba sorolt feltételek is teljesülnek, akkor a nominális kamatvárakozásokból az infláció piac által várt pályájáról is információt nyerünk.
Az első csoporthoz tartozó első feltétel az ún. *várakozási hipotézis* teljesülése, amely szerint a spot hosszú lejáratú hozamnak meg kell egyeznie a hasonló időtávra rövidlejáratú értékpapírok egymás utáni vásárlásával elérhető *elvárt* hozammal, azaz a spot rövid és a jövőbeli időszakokra várt rövid hozamok szorzatával:

$$\left(1+\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{t}_n)\right)^{\boldsymbol{t}_n-\boldsymbol{t}_0}=\left(1+\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{t}_1)\right)\left(1+\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{t}_0}\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2)\right)\left(1+\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{t}_0}\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3)\right)\ldots\ldots\left(1+\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{t}_0}\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}_{n-1},\boldsymbol{t}_n)\right)$$

ahol

$\boldsymbol{i(t_0, t_n)}$: spot hosszú (*n* időszakra vonatkozó) kamat
$\boldsymbol{i(t_0, t_1)}$: spot rövid kamat
$\boldsymbol{E_{t0}i(t_i, t_{i+1})}$: $\boldsymbol{(i>0)}$ az ***i***-edik időszakra a jelenben $\boldsymbol{(t_0)}$ elvárt rövid kamat

A várakozási hipotézis további "finomítása", hogy a hosszú lejáratú államkötvények hozama, mivel az ilyen értékpapírokba fektetők nagyobb kockázatot vállalnak, mint a rövid papírok sorozatába fektetők, tartalmazhat bizonyos *lejárati prémium*ot a rövid papírokba fektető stratégia elvárt hozama felett. Amennyiben ez a lejárati prémium elhanyagolható nagyságú, úgy az elvárt jövőbeni rövid kamatok lényegében megegyeznek a hozamgörbe által implikált forward kamatokkal. Szignifikáns nagyságú, de időben nem túlságosan változékony lejárati prémium esetében is egyértelműen lehet következtetni az elvárt nominális kamatokra. Probléma akkor merül fel, ha a lejárati prémium időben változó: ilyen esetben, ha a prémium előrejelezhető, a becsült értékkel módosítani kell az implikált forward kamatot. Ha a prémium nem előrejelezhető, a legtöbb, amit az elemző tehet, hogy az átlagos prémiummal korrigálja a forward kamatot.
A várakozási hipotézis ökonometriai módszerekkel tesztelhető. A tesztben viszont csak közösen lehet vizsgálni két külön hipotézist: azt, hogy a hozamgörbéből kiolvasható forward kamatok jól reprezentálják-e a piaci szereplők várakozásait (nincs-e jelen időben változó lejárati prémium) és azt, hogy a piaci szereplők várakozásai racionálisak-e. A teszt jelentősége, hogy amennyiben mindkét hipotézis (várakozási hipotézis és racionális várakozások) teljesül, akkor a jelenbeni forward kamatok a legjobb előrejelzői jövőbeni spot kamatoknak: ilyen értelemben szokás beszélni a hozamgörbe *információtartalmá*ról.
A második típusba tartozó feltétel az ún. *Fisher-egyenlőségből* fakad, amely kimondja, hogy a nominálkamat felírható az adott időszakhoz tartozó reálkamat és az inflációs várakozás szorzataként:

$$1+\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{t}_n)=(1+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{t}_n))(1+\pi^e(\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{t}_n)), \qquad (1.3)$$

ahol:

$\boldsymbol{i(t_0, t_n)}$: spot nominál kamat a $\boldsymbol{(t_0, t_n)}$ időszakra
$\boldsymbol{r(t_0, t_n)}$: (*ex ante*) reálkamat a $\boldsymbol{(t_0, t_n)}$ időszakra
$\boldsymbol{\pi^e(t_0, t_n)}$: inflációs várakozás a $\boldsymbol{(t_0, t_n)}$ időszakra

Motivációnk (inflációs várakozásokra vonatkozó információ kinyerése a nominálkamatokból) szempontjából az 1.3 képlettel két probléma is felmerül. Az első probléma az, hogy az *ex ante* reálkamat nem megfigyelhető.
Nyilvánvaló, hogy még ha a lejárati prémium okozta problémát megoldva sikerül is képet kapnunk a nominálkamatokra vonatkozó várakozásokról, a különböző jövőbeni időszakokra vonatkozó inflációs várakozásokra csak akkor tudunk következtetni, ha ismerjük a reálkamat piaci szereplők által elvárt pályáját, vagy ha van megfelelő indokunk arra, hogy az elvárt reálkamatot hosszabb távon stabilnak tekintsük.
A második probléma az 1.3 képlettel az, hogy nem kezeli a bizonytalanságot. Fisher elméletét kibővítve, *Lucas* (1978) bemutatta, hogy amennyiben az intertemporálisan optimalizáló fogyasztó bizonytalan jövőbeli jövedelmekkel, árakkal, reálkamattal szembesül, akkor a nominális kamat az *ex ante* reálkamaton és az inflációs várakozáson kívül tartalmazni fog egy kockázati prémium komponenset is. Ez a kockázati prémium azonban lehet negatív, csakúgy, mint pozitív előjelű. Ezen elméleti eredmény mögött a következő intuíció húzódik meg: amennyiben az infláció és a fogyasztás növekedési ütemének jelenben várt jövőbeli kovarianciája pozitív, akkor a kockázati prémium negatív, hiszen a fogyasztás növekedési ütemének csökkenése ilyenkor az infláció csökkenésével jár együtt (legalábbis a várakozásokban), ami tőkenyereséget jelent a fix nominális hozamú kötvényeken; ez a tőkenyereség pedig egyfajta biztosítást jelent a fogyasztáscsökkenés ellen. A negatív kockázati prémium (alacsonyabb elvárt nominálhozam) tulajdonképpen felfogható egyfajta biztosítási díjnak is, amit a kockázatkerülő fogyasztók hajlandóak fizetni a fent leírt "biztosítást" magukban hordozó fix nominális hozamú kötvényekért. Amennyiben viszont a fogyasztás növekedési üteme és az infláció jelenben várt kovarianciája negatív, a fogyasztás növekedési ütemének esetleges csökkenését a fix hozamú kötvények növekvő infláció miatt bekövetkező tőkevesztesége csak súlyosbítja: ilyen helyzetben a fogyasztók a fix hozamú kötvények tartásáért pozitív kockázati prémiumot várnak el, így az elvárt nominális hozam is magasabb lesz, mint az *ex ante* reálkamat és az inflációs várakozás összege.
Felmerül a kérdés, hogy amennyiben a nominális kamatok a fenti három komponens (*ex ante* reálkamat, inflációs várakozás, kockázati prémium) által meghatározottak, a monetáris politika nem követ-e el nagy hibát, amikor a hosszú nominális kamatok változását az inflációs várakozások megegyező irányú és nagyságú változásának tudja be. Mint azt fentebb már említettük, az elvárt reálkamatok stabilitása az ilyen következtetés helyességének egyik feltétele, a másik feltétel pedig az, hogy a kockázati prémium időben viszonylag stabil, vagy elhanyagolható nagyságú legyen. Hogy ez a két feltétel teljesül-e, az természetesen empirikus kérdés. *Ireland* (1996) amerikai adatokat vizsgálva egy 1994-ig tartó 35(!) éves idősoron, arra a következtetésre jut, hogy az USA-ban a vizsgált időszakban az *ex ante* reálkamat meglepően stabil, a fix nominális kötvények árában rejlő kockázati prémium pedig kicsi volt, azaz a Fed illetékesei - amennyiben az anekdotális bizonyítékoknak megfelelően valóban az inflációs várakozások megváltozásának tudtak be minden, a hosszú kamatokban jelentkező változást, és a monetáris politikai lépéseket ezen információra alapozták - nem követtek el nagy hibát. Megjegyzendő, hogy a hozamgörbe információtartalmáról a fenti (tehát az inflációs várakozásokra vonatkozó) értelemben is szokás beszélni.
Nem lehet ezen a helyen nem szót ejteni arról, hogy rövid távon reálisan mi várható a magyar adatokból becsült hozamgörbe ökonometriai tesztjeitől. A zéró-kupon hozamgörbe előállításához szükséges adatok jelenleg 1996 októberétől állnak

rendelkezésre. Feltéve, hogy sikerül is rekonstruálni a napi zéró-kupon hozamgörbéket ettől az időponttól kezdve, nem valószínű, hogy a tesztek a várakozási hipotézis teljesülését fogják megerősíteni. Ezt azért gondoljuk így, mert - mint említettük - a várakozási hipotézis csak racionális várakozások feltételezésével együtt tesztelhető, és nem valószínű, hogy a piac kamatokra vonatkozó előrejelzési hibái a rendelkezésre álló rendkívül rövid vizsgált időszakban kiegyenlítenék egymást. Az *ex ante* reálkamatok és a kockázati prémium időbeli stabilitásának vizsgálata szintén jóval hosszabb idősort igényel. Ez azonban nem jelenti azt, hogy nem érdemes a zéró-kupon hozamgörbe napi szintű előállításával foglalkozni, hiszen hosszabb idősor hiányában a várakozási hipotézis hosszútávú teljesülését nem csak elfogadni, de cáfolni sem tudjuk. Ezen kívül, ha nem kezdődik el a zéró-kupon hozamgörbe napi szintű (ill. visszamenőleges) becslése, akkor nem várható, hogy bármikor is rendelkezésre áll majd kellő hosszúságú idősor az említett feltételezések becsléséhez, és mind a kamat-, mind az inflációs várakozásokra való következtetés megalapozatlan marad.

2. Zéró-kupon hozamgörbe becslés: alternatív módszerek és tapasztalatok a magyar adatokkal

2.1 Zéró-kupon hozamgörbe becslése polinomiális illesztéssel:

Mind az egyszerű polinomiális, mind a spline alapú becslés esetében feltételezzük, hogy a piac által a különböző $\boldsymbol{t}$ időtávokra alkalmazott diszkontfaktorokat megadó $\delta(\boldsymbol{t})$ diszkontfüggvény felírható $\boldsymbol{k}$ db bázisfüggvény (+1) összegeként:

$$\delta(\boldsymbol{t}) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j \boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{t}) \quad , \qquad (2.1)$$

ahol:

$\boldsymbol{f_j(t)}$: a $\boldsymbol{j}$-edik bázisfüggvény
$\boldsymbol{a_j}$: a $\boldsymbol{j}$-edik bázisfüggvény együtthatója

Amennyiben a diszkontfüggvényt ismerjük, a zéró-kupon hozamgörbe egyértelműen származtatható a következő összefüggésből:

$$\delta(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{\left(1 + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{t})\right)^{\boldsymbol{t}}}$$

A zéró-kupon görbe tehát:

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}) = \delta(\boldsymbol{t})^{-1/\boldsymbol{t}} - 1 \qquad (2.2)$$

Rendelkezésre álló adatok egy adott napi zéró-kupon görbe becsléséhez:
$\boldsymbol{n}$ db fix hozamú államkötvény/DKJ nettó piaci ára és felhalmozott kamata ($\boldsymbol{p_i}$ ill. $\boldsymbol{ai_i}$, $\boldsymbol{i=1,..,n}$) valamint cash-flow-ja ($\boldsymbol{c_{ij}}$, $\boldsymbol{j=1,..m_i}$), ahol $\boldsymbol{m_i}$ az $\boldsymbol{i}$-edik állampapír kifizetéseinek (kamat + törlesztés) száma, ill. a kifizetések időpontját megadó $\boldsymbol{t(c_{ij})}$ függvény.
A kiinduló adatokat kompaktabb módon, mátrix jelöléssel is felírhatjuk. Legyen **C** egy olyan $\boldsymbol{q}$ x $\boldsymbol{n}$ -es mátrix, amely oszlopainak száma megegyezik az instrumentumok

számával ($\boldsymbol{n}$), sorainak száma pedig annyi, ahány különböző napon kifizetés történik bármelyik instrumentumon ($\boldsymbol{q}$). A **C** *cash-flow mátrix* $\boldsymbol{c_{ij}}$ eleme tehát a sorrenben az ***i***-edik kifizetési napon a ***j***-edik instrumentum által fizetett összeget tartalmazza. Legyen az $\boldsymbol{m}$ egy olyan $\boldsymbol{q}$ x ***1*** -es vektor, melynek elemei a $\boldsymbol{q}$ számú kifizetési nap mai naptól való távolságát adják meg (évben). $\boldsymbol{p}$ és $\boldsymbol{ai}$ legyenek a $\boldsymbol{p_i}$ és $\boldsymbol{ai_i}$ elemekből képzett $\boldsymbol{n}$ x ***1*** -es vektorok. Végül $\delta'(\boldsymbol{m})$ legyen egy olyan ***1*** x $\boldsymbol{q}$ -s vektor, amelynek ***i***-edik eleme az $\boldsymbol{m_i}$ lejárathoz tartozó diszkontfaktor. Az $\boldsymbol{n}$ instrumentum árazása mátrix jelöléssel:

$$\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{ai}'=\delta'(\boldsymbol{m})\boldsymbol{C} \qquad (2.3)$$

A mátrix jelöléshez még visszatérünk, a becsléshez szükséges regressziók levezetéséhez viszont a nehézkesebb hagyományos jelölésre van szükség[7].
Az ***i***-edik instrumentum árazása:

$$\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{ai}_i=\sum_{l=1}^{m_i}\delta(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{c}_{il}))\boldsymbol{c}_{il} \qquad (2.4)$$

A (2.1)-et a (2.4)-be helyettesítve:

$$\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{ai}_i=\sum_{l=1}^{m_i}\left[1+\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{c}_{il}))\right]\boldsymbol{c}_{il}=\sum_{l=1}^{m_i}\boldsymbol{c}_{il}+\sum_{l=1}^{m_i}\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{c}_{il}))\boldsymbol{c}_{il} \qquad (2.5)$$

A (2.5)-öt átrendezve:

$$\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{ai}_i-\sum_{l=1}^{m_i}\boldsymbol{c}_{il}=\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{a}_j\sum_{l=1}^{m_i}\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{c}_{il}))\boldsymbol{c}_{il} \qquad (2.6)$$

Bevezetve a következő jelöléseket:

$$\boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{ai}_i-\sum_{l=1}^{m_i}\boldsymbol{c}_{il}$$

$$\boldsymbol{x}_{ij}=\sum_{l=1}^{m_i}\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{c}_{il}))\boldsymbol{c}_{il} \ ,$$

a (2.6) felírható a következő formában:

$$\boldsymbol{y}_i=\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{x}_{ij} \ .$$

Mivel mind $\boldsymbol{y}_i$ -t, mind $\boldsymbol{x}_{ij}$ -t ismerjük bármelyik instrumentumra, az $\boldsymbol{a}_j$ paramétereket OLS regresszióval becsüljük. Mátrix jelöléssel tehát:

$\hat{\boldsymbol{a}}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$, ahol

[7] Hasonló levezetést mutat be *McCulloch (1971).*

$\hat{a}$ a becsült koefficiensek k x 1-s vektora
X az x_{ij} elemekből álló n x k-s mátrix
y az y_i elemek n x 1-es vektora.

A becsült $\hat{a}$ paramétereket a (2.1)-be helyettesítve kapjuk a becsült diszkontfüggvényt, majd abból a (2.2) szerint származtatjuk a becsült zéró-kupon görbét.

Ahogy az a fenti eljárásból is látszik, a becslésben döntő jelentősége van az $f_j(t)$ bázisfüggvények alakjára vonatkozó feltételezésnek. Egyszerű, ***n***-ed fokú polinomiális illesztés estén a (2.1) képletben $k = n$, a bázisfüggvények pedig a következő egyszerű alakot veszik fel: $f_j(t) = t^j$, azaz $\delta(t)$ egy ***(k=)n***-ed fokú polinom ***t***-ben. Polinomiális spline illesztés esetén a bázisfüggvények definíciója komplikáltabb, függ az adott cash-flow elem időbeli elhelyezkedésétől az ún. csomópontokhoz képest (ld. alább). *McCulloch* (1975) bemutat egy lehetséges harmadfokú spline bázist.

Az egyszerű polinomiális illesztéssel kapcsolatos leggyakrabban hangoztatott probléma az illeszkedés és a becsült paraméterek stabilitása közötti trade-off. Minél magasabb az alkalmazott polinom foka, annál kevésbé "sima" a kapott hozamgörbe, illetve annál instabilabbak a becsült paraméterek. Túlságosan alacsony polinomfok esetén viszont a kapott görbe nem illeszkedik elég jól a megfigyelési pontokhoz. Mivel a megfigyelt instrumentumok zömének lejárata általában a hozamgörbe rövid (éven belüli) szakaszára esik, az illeszkedés elsősorban a hosszabb lejáratokon rosszabb. Ha ezt a problémát a polinomfok növelésével próbáljuk orvosolni, akkor a görbe rugalmasabban viselkedik a hosszabb lejáratokon, de ez - a már említett paraméter instabilitás mellett - nagyon gyakran azzal is jár, hogy az implikált forwardgörbe irreális alakot ölt: ahelyett, hogy hosszabb időtávokon kisimulna, meredeken emelkedni, csökkenni vagy hullámzani kezd. Mivel joggal feltételezhetjük, hogy egy piaci szereplő nominálkamat várakozásai a lejárat növekedésével egy bizonyos értékhez konvergálnak, a hosszabb időtávon változékonnyá váló forwardok nem tűnnek ésszerűnek.
Az illeszkedés-stabilitás probléma enyhítésére dolgozták ki a polinomiális spline technikát. Lényege, hogy a teljes lejárati spektrumot több szakaszra bontják fel, és az egyes szakaszokra külön-külön illesztenek (viszonylag alacsony fokú) polinomokat, azzal a megkötéssel, hogy a polinomok csatlakozási pontjaiban (az ún. csomópontokban) a görbe kellőképpen "sima" maradjon[8]. A spline tulajdonképpen ez a több polinomból összerakott görbe, mely tehát úgy biztosít jó illeszkedést, hogy közben elkerüli a magas polinomfok miatti instabilitást.
Mindezek mellet a spline becslés sem teljesen problémamentes. A legnagyobb gondot itt az okozza, hogy a csomópontok számának ill. elhelyezkedésének meghatározása önkényes. A csomópontok száma a spline rugalmasságát határozza meg. Kevés csomópont rossz illeszkedést, túl sok csomópont az outlierekhez való túlságos alkalmazkodást eredményez, hasonlóan az egyszerű polinomiális becslésnél említett trade-off-hoz. A csomópontok optimális számát illetően leginkább csak az

[8] A "simaság" matematikai megfelelője ebben a kontextusban az, hogy egy n-ed fokú (n bázisfüggvényből álló) spline minden csomópontja körül az n-1-edik derivált folytonos.

irodalomban fellelhető hüvelykujj-szabályokra támaszkodhatunk: *McCulloch (1975)* pl. a becsléshez használt instrumentumok számának négyzetgyökéhez legközelebb álló egész számot javasolja e célra. A csomópontok elhelyezése szintén az elemző belátására van bízva. A két legyakoribb megoldás a csomópontok rögzítése adott horizontokon (pl. 1, 5, 10 év) vagy olymódon történő elosztás, hogy két-két csomópont közé lehetőleg azonos számú instrumentum lejárata kerüljön. Az utóbbi megoldás előnye, hogy az államadósság lejárati szerkezetében történő változások azonnal és automatikusan tükröződnek a csomópontok elhelyezkedésében. Hátránya viszont hogy az esetleg napról napra is változó csomópont-pozíciók miatt a becsült hozamgörbe elmozdulásai a valóságostól jelentősen eltérhetnek.

Bár javít az illeszkedés és a stabilitás közötti trade-offon, a spline becslés is vezethet a hosszabb időtávokon irreálisan viselkedő implikált forwardokhoz. Azt sem szabad elfelejteni, hogy eddig még csak a forwardok leghosszabb megfigyelhető lejáraton belüli viselkedéséről beszéltünk, holott a hozamgörbe egyik fontos alkalmazási területe lehet az aktuális lejárati horizonton kívül eső új instrumentumok (magyarországi viszonylatban pl. a 10 éves államkötvény lenne ilyen) árazása. Ilyen célokra a polinomok ill. a spline-ok, mivel csak a meglévő lejáratokhoz illeszkednek és aszimptotikusan nincsenek korlátozva (explozívak), nem alkalmasak.

A $\delta(t)$ diszkontfüggvénnyel kapcsolatos a priori feltételezés, hogy pozitív és monoton csökkenő. A gyakorlatban azonban a polinomiális vagy spline becsléssel előállított diszkontfüggvény felvehet negatív értékeket ill. lehet pozitív meredekségű. Ilyen esetekben a kapott zéró-kupon görbe értelmezhetetlen. Ezzel a problémával (negatív diszkontfüggvény) sajnos a magyar zérókupon-görbe idősor előállítása során is szembe kell néznünk (ld. alább).

2.2 Hozamgörbe-becslés kompakt modellekel

A polinomiális illetve spline regressziótól eltérő eljárás az utóbbi években - különösen a monetáris hatóságok körében - népszerűvé vált ún. Nelson-Siegel módszer ill. függvényalak (ld. *Nelson -Siegel (1987)*), valamint ennek továbbfejlesztett változatai. Polinomiális és spline módszerek esetében azt feltételezzük, hogy a diszkontfüggvény előállítható bizonyos számú bázisfüggvény kombinációjaként, majd a bázisfüggvények feltételezett alakját rögzítve ezek koefficienseit becsüljük. Ezzel ellentétben Nelson és Siegel közvetlenül az (azonnali) forwardgörbére feltételez egy megfelelő függvényformát. Feltevésük szerint az azonnali forwardok pályáját egy másodfokú differenciálegyenlet írja le[9]:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}) = \beta_0 + \beta_1 \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{m}/\tau} + \beta_2 (\boldsymbol{m}/\tau)\left(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{m}/\tau}\right) \qquad (2.7)$$

Ahol $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{m})$ az m időszak múlva érvényes azonnali kamat (forward), $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau$ a forwardgörbe alakját befolyásoló paraméterek.

A továbbiakban az eddigi diszkrét (éves) kamatok helyett folytonos kamatokat alkalmazok, mivel a következő összefüggéseket így jóval egyszerűbben lehet bemutatni. Az ***i(m)*** éves kamat folytonos kamatozású megfelelője:

$$\boldsymbol{i}_c(\boldsymbol{m}) = \ln\left(1 + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{m})\right).$$

---

[9] Praktikus okokból NS azt a további megkötést tette, hogy a differenciálegyenlet két gyöke egyenlő. Így alakult ki a (7)-ben látható alak.

Az m lejáratra vonatkozó (folytonos kamatozással számolt) spot kamatot a (2.7)-et 0-tól $\boldsymbol{m}$-ig integrálva és $\boldsymbol{m}$-mel osztva kapjuk meg:

$$i_c(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\left(1 - e^{-m/\tau}\right) / (m / \tau) - \beta_2 e^{-m/\tau} \qquad (2.8)$$

A spot kamatokból pedig már egyszerűen származtatható a diszkontfüggvény:

$$\delta(m) = e^{-i_c(m)m} \qquad (2.9)$$

De mi indokolja, hogy a forwardgörbéből illetve annak éppen a (2.7)-ben feltételezett alakjából induljunk ki? Mint azt korábban már említettük a forwardgörbe alakjára vannak olyan a priori feltételezések, melyek alapján egy becsült hozamgörbét ill. a belőle származtatott implikált forwardgörbét el lehet vetni, mint implauzibilis, az elmélettel nem összeegyeztethető becslési eredményt. Ilyen a priori feltételezés például az, hogy az implikált forwardok a hosszabb időtávokon lecsengenek, közelítenek egy aszimptotikus érték felé. Ha viszont ezen a priori feltételezés teljesülése alapján szelektálunk a különböző becslési módszerek eredményei között, miért nem használunk olyan módszert, amely minden körülmények között biztosítja a feltétel teljesülését? NS éppen ezt tette, amikor egy olyan hozamgörbe-függvényalakot (8) feltételeztek, ami (szerintük) eléggé rugalmas ahhoz, hogy a hozamgörbe "tipikus" formáit (emelkedő, inverz vagy "púpos") felvegye, eleget téve a legtöbb a priori feltételezésnek. Az NS-hozamgörbe rendkívül tömören, mindössze négy becsült paraméter segítségével ragadja meg a zéró-kupon görbe alakját. További előnye, hogy a paraméterek értelmezhetők is. Ahogy $\boldsymbol{m}$ tart a végtelenbe, az exponenciális tagok jelentéktelenné válnak, így β_0 fejezi ki az aszimptotikus ("nagyon hosszú") hozamot:

$$\lim_{m \to \infty} i_c(m) = \beta_0 \ .$$

Ahogy $\boldsymbol{m}$ nullához tart, $i_c(m)$ úgy tart $\beta_0 + \beta_1$-hez:

$$\lim_{m \to 0} i_c(m) = \beta_0 + \beta_1 \ ,$$

azaz e két paraméter összege az azonnali hozamot adja meg. Az azonnali hozamokra nem valamiféle elvont kategóriaként kell gondolni: a legtöbb empirikus munkában az azonnali hozamokat használják pl. az overnight hozamok közelítéseként. A τ paraméter azt mutatja, hogy a hozamok milyen gyorsan konvergálnak az aszimptotikus hozamhoz, a β_2 paraméter pedig az esetleges "púp" nagyságát befolyásolja.

Az NS által választott függvényalak megfelel a hozamgörbéhez fűzött a priori elvárásoknak, azonban ez természetesen azt is jelenti, hogy illeszkedése általában rosszabb. Ez a magyarázata annak, hogy a módszer a - hozamgörbét elsősorban a félreárazott instrumentumok felismerésére használó - profitorientált piaci szereplők között kevésbé, míg a hozamgörbe alapvető alakjára kíváncsi jegybankok körében sokkal inkább vált népszerűvé.

Svensson (1994) az NS-hozamgörbe rugalmasságát növelendő, a (2.8)-at még egy taggal bővítette:

$$i_c(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\left(1 - e^{-m/\tau_1}\right) / (m/\tau_1) - \beta_2 e^{-m/\tau_1} + \beta_3\left(\frac{1 - e^{-m/\tau_2}}{m/\tau_2} - e^{-m/\tau_2}\right) \quad (2.10)$$

Ez a bővítés lényegében még egy "púpot" vagy "völgyet" enged meg az NS görbében már meglévőn kívül.

A Nelson-Siegel ill. a Svensson hozamgörbék paramétereinek becslési módszerét a mátrix jelölés (2.3) segítségével ismertetem. A becslési eljárás lényege, hogy a (2.8)-at (ill. Svensson módszer esetén a (2.10)-et) az $\boldsymbol{m}$ vektor minden egyes elemével kiértékelve képezzük az $\boldsymbol{i_c}'(\boldsymbol{m})$ ***1*** x ***q***-s vektort, majd ezt a (2.9)-be helyettesítve képezzük a diszkontfaktorok $\delta'(\boldsymbol{m})$ ***1*** x ***q***-s vektorát. A becsülni kívánt paramétereket valamilyen kezdeti értéken rögzítve, a kiértékelt $\delta'(\boldsymbol{m})$ vektorral a **C** cash-flow mátrixot a (2.3) szerint megszorozva kapjuk a becsült bruttó árakat. A becsült és megfigyelt bruttó árak különbségének négyzetösszegét valamilyen numerikus módszerrel (pl. Gauss-Newton) minimalizálva kapjuk a becsült paraméter-vektort.
Alternatívát jelent a becsült bruttó árakból minden egyes iteráció alkalmával kiszámított belső megtérülési ráták illetve a megfigyelt IRR-ek különbségének négyzetösszegét minimalizáló módszer. Mivel az árak és az IRR közötti kapcsolat nemlineáris, ez az eljárás nem ekvivalens az árkülönbségeket minimalizálóval. Mivel a rövidebb lejáratú instrumentumok duration-ja, ill. ennek következtében az áraik érzékenysége a hozam megváltozására kisebb, az árkülönbség-minimalizáló módszer tekinthető úgy is, mint ami implicit módon kisebb súlyt fektet a rövidebb lejáratokra. A hozamkülönbségeket minimalizáló módszer pedig ilymódon éppen a rövid lejáratokra fektet relatíve nagyobb súlyt, így az ezzel a módszerrel becsült hozamgörbe a rövidebb lejáratokon, míg az árkülönbség-minimalizálással képzett a hosszabb lejáratokon fog jobban illeszkedni. A két módszer közötti választást elsősorban a becslés motivációja kell, hogy meghatározza (pl. hogy a monetáris politika az éven belüli vagy a hosszabb kamatvárakozások alakulására kíváncsi-e). Másodsorban azonban az is szerepet játszik, hogy a hozamkülönbség-minimalizálás (mivel minden egyes iterációnál ki kell számolni az összes instrumentum IRR-jét - amit szintén csak iterálással lehet elvégezni) rendkívül (még a mai számítógépek teljesítménye mellet sem elhanyagolhatóan) számításigényes módszer.

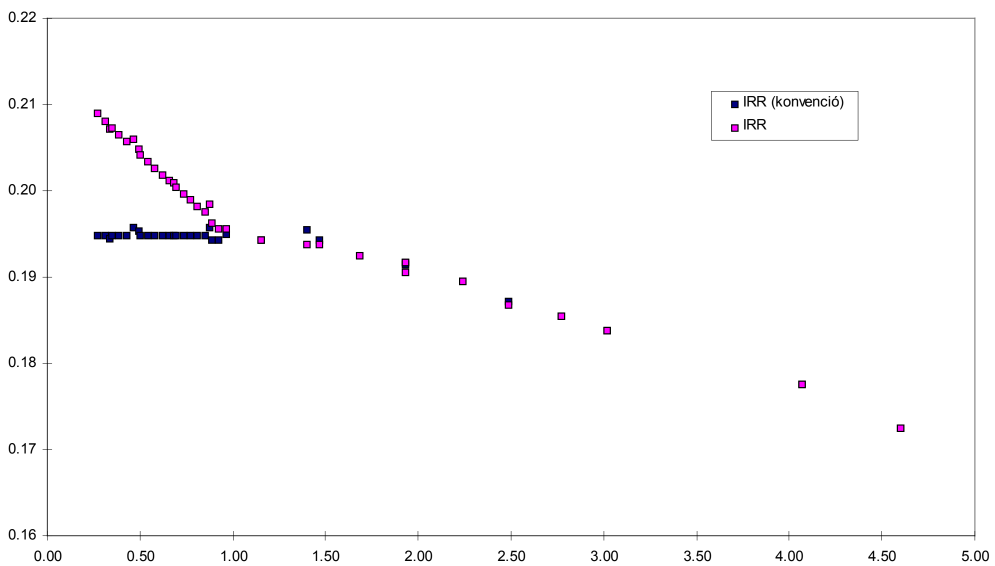
2.3 Az elvégzett hozamgörbe-becslések input adatairól

Az elvégzett becslések a kötelező árjegyzésbe bevont (jelenleg 36 darab) diszkontkincstárjegy illetve államkötvény másodpiaci árát használják fel. Mivel egy adott időpillanatban nem valószínű, hogy az összes ilyen instrumentummal éppen zajlana tranzakció, az elsődleges forgalmazók adott pillanatban érvényes legjobb vételi és eladási árfolyamának átlagát tekintettem piaci árfolyamnak (az adatok egészen pontosan a Reuters HUBEST oldalának a kereskedési időszak egy véletlenszerűen kiválasztott pillanatában történő lementéséből származnak). Vitatható, hogy ez az ár valóban a piaci árat reprezentálja-e. Emellett szól, hogy a legjobb árat jegyző elsődleges forgalmazó egy bizonyos értékhatárig (ami viszont meglehetősen alacsony - 50 millió Ft) köteles az általa jegyzett áron bármilyen ajánlatot elfogadni.

Alternatívát jelentene a naponta ténylegesen lezajló másodpiaci tranzakciók átlagos áraiból kiindulni. Ezeknek azonban csak a KELER OTC forgalmában ill. a BÉT-en keresztül zajló szeletéről szerezhetünk információt. Természetesen ezek a tranzakciók az adott napon belül nem ugyanabban az időpontban köttetnek, és az állampapír-palettának csak egy jóval szűkebb részét érintik - naponta 16-18 papírt. A BÉT-en kialakuló árfolyamok ráadásul közismerten megbízhatatlanok - gyakoriak bújtatott transzfert sejtető árakon zajló tranzakciók. Mindezeket figyelembe véve a legjobb megoldásnak az adott pillanatban érvényes legjobb vételi és eladási árfolyamok alkalmazása tűnt.
A jelenlegi kb. 36 instrumentum lejárati spektruma 3 hónap és 4.9 év között van. Az instrumentumok többsége 1 éven belül jár le, kb. egyharmaduk éven túli lejáratú (ld. 2.1 ábra). A hozamgörbében jelenleg kb. 3 és 4 év között található egy nagyobb, 13 hónapos szakadás, ami a legfrissebben kibocsátott 3 éves és a legrégebben kibocsátott 5 éves államkötvény lejárata közötti különbségből származik, és mint ilyen fokozatosan csökkenni fog, ahogy újabb 3 éves kötvények kerülnek kibocsátásra.

2.1 ábra[10]

A kötelezõ árjegyzésbe tartozó fix kamatozású instrumentumok belsõ megtérülési rátái, 1997.11.17-i értéknap



A dolgozat készültekor rendelkezésre álló idősor az 1996. október 11-i értéknaptól 1997. november 17-ig tartott, néhány hiányzó nappal. Az adatokat az ÁKK-ban mentették le és (nem hivatalosan) bocsátották rendelkezésemre.
Polinomiális illesztéssel (harmad-, ötöd- és hetedfokú polinommal) a teljes idősorra megkíséreltem a hozamgörbe rekonstrukcióját. Ez harmadfokú polinommal a teljes idősorra, ötöd- és hetedfokúval az idősor nagy részére sikerült is (ld. alább).
Kompakt függvényalakok illesztése esetén a számítások, de különösen az input adatok előkészítése jóval több időt igényelnek. Egy bizonyos kezdőérték-vektort kiválasztva

[10] Az ábrán két adatsor látható, melyeknek éven túli elemei gyakorlatilag egybeesnek, éven belüli elemeik között viszont jelentős különbségek vannak. Ez a magyarországi kamatszámítási konvenció (éven belüli lejárat esetén lineáris kamatszámítás) miatt van így. A becsült zéró-kupon hozamok természetesen a valódi IRR-ekkel hasonlítandók össze, és nem a konvenció szerinti hozamokkal (ld. még 3. fejezet, 24. o. ill. 17. lábjegyzet).

(ld. alább), Svensson-módszerrel rekonstruáltam a zéró kupon görbét a teljes rendelkezésre álló idősorra.

2.4 Zéró-kupon hozamgörbe-becslések magyar adatokkal

A következő rész célja, hogy támpontokat nyújtson a jegybank számára az alternatív zéró-kupon görbe számítási módszerek közötti választásban. Hogy az alternatívák közötti választásra szükség van és nem lehet párhuzamosan mindegyik módszerrel dolgozni, azt indokolja egyes módszerek (pl. a kompakt függvényformák) számításigényessége, de leginkább az, hogy egy olyan helyzetben, amikor a többféle módszer alapján számított zéró-kupon görbék és ezáltal a belőlük levonható következtetések lényegesen különböznek, a jegybanknak ne lehessen lehetősége ad hoc alapon választani.

Milyen szempontok merülnek fel a különböző alternatívák közötti választáskor?

1. Illeszkedés a rendelkezésre álló idősoron

Ennek egy napra vonatkozó mérőszáma lehet a megfigyelt árak és a becsült zéró-kupon görbe alapján számított árak különbségének négyzetösszege, osztva a becsléshez felhasznált instrumentumok számával (Root Mean Squared Error, RMSE):

$$\boldsymbol{RMSE} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{p}_i - \hat{\boldsymbol{p}}_i \right)^2}{\boldsymbol{n}}$$

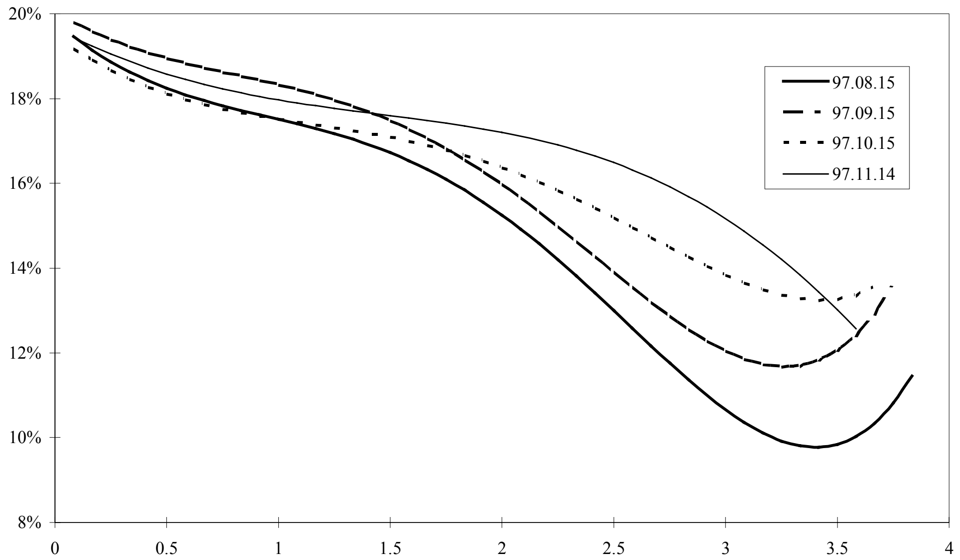
Az RMSE átlagát és szórását a teljes rendelkezésre álló idősorra kiszámítva összehasonlíthatjuk két módszer árazási hatékonyságát. Ezen a területen várhatóan a polinomiális illesztéssel becsült hozamgörbék teljesítenek jobban.

2. A hozamgörbe és az implikált forwardgörbe alakjára vonatkozó a priori feltételezések teljesülése

Ezen szempont alapján elsősorban a polinomiális módszerrel merülnek fel problémák. Gyakorta előfordul, hogy a becsült implikált forwardgörbe 3-3.5 év környékén meredeken visszahajlik (ld. 2.2 ábra), ami - ahogy azt fentebb már említettem - irreális eredmény.

2.2 ábra

1 éves implikált forwardgörbék; polinomfok: 5



További probléma, hogy magasabb polinomfok (5, 7) esetén a vizsgált idősorban előfordulnak olyan napok, ahol a diszkontfüggvény egy bizonyos lejárat után negatív értékeket vesz fel, következésképp a polinomiálisan illesztett hozamgörbe ezekre a napokra értelmezhetetlen ill. nem is számítható ki. Az idősorból ezen probléma miatt mind az ötödfokú, mind a hetedfokú polinom illesztése esetén több mint egy hónapnyi adat esik ki. Az értelmezhetetlen napok összefüggő szakaszt alkotva 1996 november-decemberére esnek. Bár külön nem soroltam fel, de fontos szempontnak tartom, hogy a választott módszerrel minél hosszabb idősor legyen előállítható, a hozamgörbe viselkedését vizsgáló későbbi kutatások (pl. várakozási hipotézis tesztje) céljaira. Azonban, ha a hozamgörbe pusztán operatív, monetáris politikai döntések alátámasztását célzó naponta történő előállításán van a hangsúly, akkor is figyelembe kell venni, hogy polinomiális módszer alkalmazása esetén újra előállhat olyan helyzet, mint 1996 végén, azaz előfordulhat, hogy a hozamgörbe nem lesz előállítható. Ilyen probléma a kompakt függvényalakok (Nelson-Siegel- ill. Svensson módszer) alkalmazása esetén nem fordul elő. Az utóbbiak esetében más - véleményem szerint azonban kevésbé súlyos - problémák merülnek fel. Említettem, hogy a kompakt függvényalak mószereknek nagy előnye, hogy a becsült paraméterek értelmezhetők. Ez azonban korántsem jelent biztosítékot arra, hogy ezek a paraméterek minden esetben ésszerű értékeket vesznek fel. A tapasztalatok szerint egyes napokon a becsült aszimptotikus forward kamat negatív értékeket vesz fel. Ezt a rövid- és középtávú komponensek a leghosszabb megfigyelt lejáratig ellensúlyozzák, így ezen a szakaszon maga a hozamgörbe és az implikált forwardok egyáltalán nem vesznek fel ésszerűtlen értékeket. Sőt, kísérletet téve egy ilyen napon egy hipotetikus, 10 éves államkötvény beárazására, egyáltalán nem kaptam irreális eredményt[11]. Az, hogy a becsült

[11] 1997. november 17-én a becsült Svensson hozamgörbével áraztam egy 10 éves, 12% nominál kamatozású, félévente kamatot fizető kötvényt. Az elvárt hozam (IRR) 13.81%-ra adódott (a 10 éves zéró-kupon hozam 12.26% volt). Az aszimptotikus hozam (β_0) ugyanezen a napon -21% volt, de amint ez a becsült elvárt hozamból is látszik, ez az irreális paraméter-érték még 10 éves horizonton sem változtatta a hozamgörbét teljesen degenerálttá. Mindazonáltal nagy merészség lenne a Svensson

aszimptotikus hozam néha negatív értékeket is felvesz, véleményem szerint a magyar hozamgörbe rövidsége és erősen inverz volta miatt alakulhat ki. Ha a becsült paraméterek értelmezhetőségének előnye bizonyos napokon el is tűnik, a kompakt függvényalakokkal becsült hozamgörbe - legalábbis a leghosszabb megfigyelt lejáratig -
megbízhatónak tűnik.

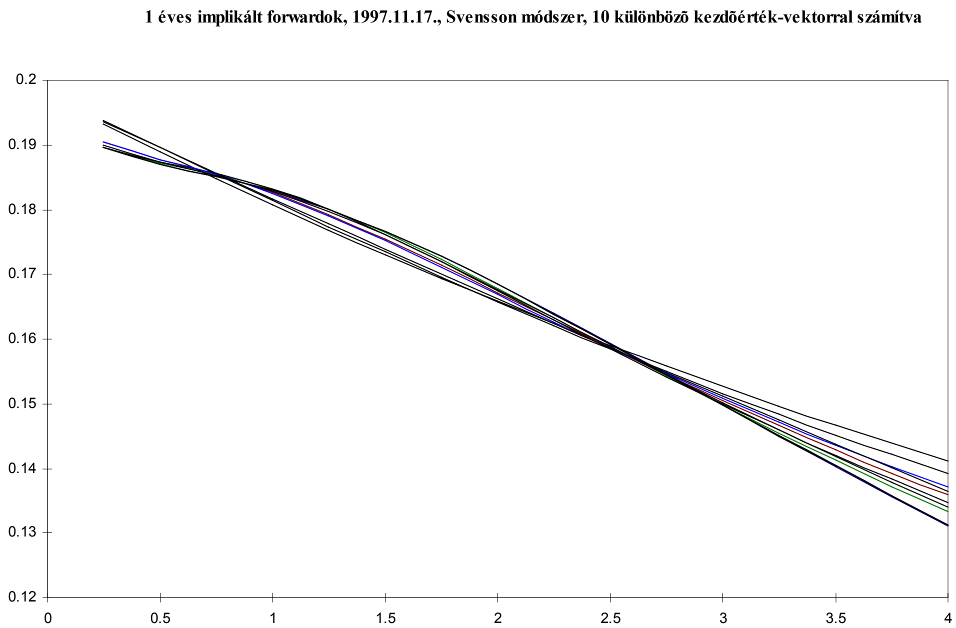
3. Egyértelműség (uniqueness)

Míg polinomiális illesztésnél a lineáris regresszió mindig csak egy, a legjobban illeszkedő hozamgörbét szolgáltatja, addig kompakt függvényalakokat alkalmazva - mivel itt a becslés numerikus módszerekkel történik - a végeredményt befolyásolja a paraméterek választott kezdeti értéke: fennáll a veszélye, hogy a módszer megragad egy lokális minimumban, de akár az is előfordulhat, hogy a célfüggvény értéke nem konvergál. Mivel lokális minimumokból több is létezhet, a becslési eljárás egymástól lényegesen különböző kezdőérték-vektorok alkalmazása esetén eltérő becsült hozamgörbét szolgáltathat, azaz nincsen garantálva, hogy a becsült hozamgörbe egyértelmű (unique).
A becsléseknél használt numerikus módszer az Excel Solver-ben opcióként felkínált kvázi-Newton. Ha 100 iteráción belül nem történt konvergencia, akkor az adott kezdőértékekkel való aznapi becslést nem-konvergálónak minősítettem. Ez az eset azonban meglehetősen ritkán fordult elő.
A kezdőértékek megválasztásánál az egyik lehetséges stratégia, hogy az összes megfigyelt napra ugyanazokkal a kezdőértékekkel indítjuk a becslést. Egy másik ésszerű stratégia lehet, hogy - miután az idősor első napjára elfogadható becsült paramétereket kaptunk - mindig a vizsgált napot megelőző nap becsült paramétereit alkalmazzuk a napi becslések kezdőértékeként.
Mivel az, hogy az egyes napokra több különböző kezdőértékkel is végrehajtsuk a becslést rendkívül számításigényes lenne, csak egy - szubjektíven elfogadhatónak ítélt - kezdőérték-vektort alkalmaztam az egész idősorra. Tanulságos azonban legalább egy napra több kezdőérték-vektorral is végrehajtani a becslést. A 2.3 és 2.4 ábrák tartalmazzák az idősor legutolsó napjára Svensson módszerrel, 10 különböző kezdőérték-vektor alkalmazásával becsült hozamgörbéket ill. implikált forward görbéket.

hozamgörbét - kiváltképp ilyen napokon - a megfigyelt leghosszabb lejáraton túli extrapolációra használni.

2.3 ábra

2.4 ábra



Amint az ábrákból látható, a becsült hozamgörbék és forwardok mindössze két, egymástól szignifikánsan különböző[12] lejárati struktúrát reprezentálnak. Három kezdőérték-vektor esetében egy egyszerűbb (szinte lineáris) term structure rajzolódott ki, míg a maradék hét esetében egy komplexebb. Mindkét típuson belül az illeszkedés (TSS) nagyon hasonló, ami azt sugallja, hogy a csoportokon belül a becslések ugyanazt az underlying term strucure-t ragadják meg. A két csoport illeszkedése között azonban jelentős különbség van: az “egyszerűbb” struktúrát reprezentáló csoport átlagos TSS-e kb. háromszorosa a “komplexebb” csoporténak. Ezen - a

[12] Itt nem statisztikai szignifikanciáról, pusztán intuitív alapon megállapított különbözőségről van szó.

teljesség igénye nélkül készült - vizsgálat tanulsága tehát az, hogy valószínűleg nem követünk el túl nagy hibát akkor, amikor egy - szubjektíven elfogadhatónak ítélt (kellően “komplex” term structure-höz vezető) kezdőérték-vektorral végezzük el a becslést (esetleg az egész idősoron), hiszen jelentősen különböző kezdőértékekkel elvégzett becslések is lényegében ugyanahhoz a becsült hozamgörbéhez vezetnek[13]. Mindig fennál ugyan a lokális minimumba kerülés veszélye (az előző példában ezt reprezentálja az “egyszerű” csoport), de ennek kicsi a valószínűsége, ha a kezdőértékek egy másik napon már a (valószínű) globális minimumhoz (“komplexebb” csoport) vezettek.
A “komplex” csoport becsült paramétereit vizsgálva még egy tanulság vonható le: lényegesen (előjelben, nagyságrendben) különböző becsült paraméterek is szolgáltathatnak a leghosszab megfigyelt lejáratig (5 év) lényegében ekvivalens (hasonlóan illeszkedő, egyező alakú) hozamgörbéket (ld. 2.1 táblázat). Ez egyfajta identifikációs problémára utal, azonban ha a paraméterek értelmezésének igényéről lemondunk, és csak a hozamgörbe leghosszabb megfigyelt lejáratig tartó szakaszára vagyunk kíváncsiak, akkor ez a probléma nem releváns.

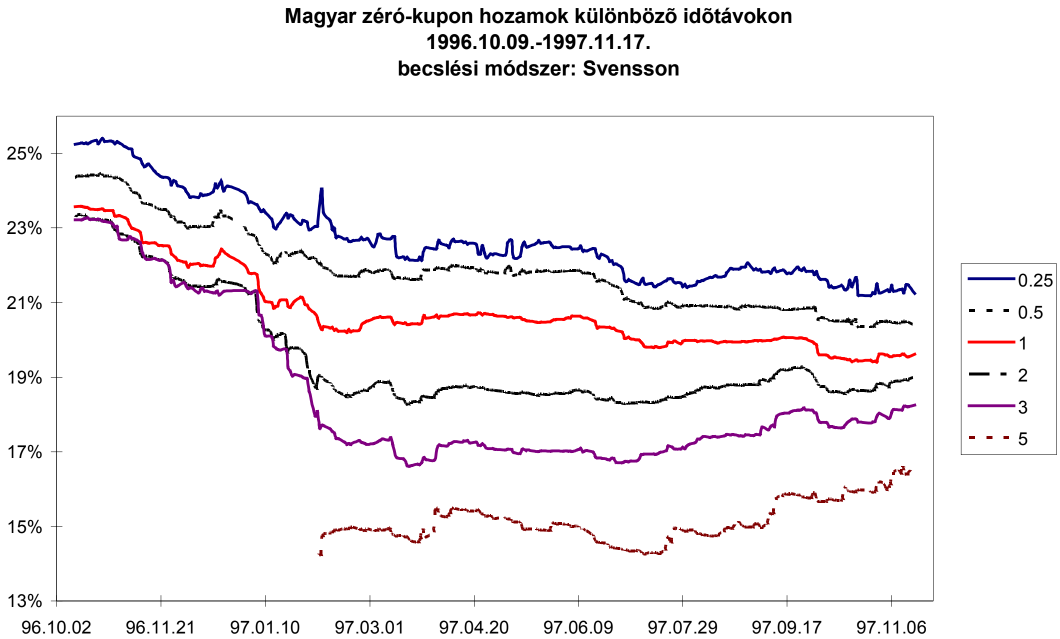
2.1 táblázat: Svensson-modell paramétereinek becslése különböző kezdőérték-vektorokkal

Date	97.11.17									
Initial										
beta0=	0.08	0.08	0.2	0.08	1	0.08	0.08	-1	0.08	0.08
beta1=	0.11	0.11	0.05	0.11	0	0.11	0.11	2	0.11	0.11
beta2=	-0.001	1	1	-1	-0.001	-0.001	-1	-0.001	-0.001	-0.001
tau1=	5	10	10	5	5	5	5	5	5	5
beta3=	-0.05	-0.05	-0.05	0.5	-0.05	0.5	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05
tau2=	0.5	1	1	1	0.5	0.5	0.5	0.5	1	5
Estimated										
beta0=	-0.21156	0.084574	0.137399	0.079471	0.048726	0.056543	0.089368	0.013535	-0.16067	-1.61767
beta1=	0.416676	0.123617	0.051131	0.107896	0.155794	0.153585	0.116305	0.191965	0.366122	1.804729
beta2=	-0.00098	-0.20122	-0.2114	0.071101	-0.001	-0.001	-0.08029	-0.001	-0.00098	-0.00032
tau1=	20.58778	13.49414	16.33859	3.257056	6.61848	5.743773	7.763165	8.422108	17.7504	83.32069
beta3=	-0.05425	-0.06044	-0.00098	-0.00431	-0.04815	-0.06421	-0.05025	-0.05242	-0.05498	1.962841
tau2=	0.47758	0.431595	0.88338	1.99539	0.412833	0.404805	0.398227	0.432904	0.471382	242.3079
TSS	0.1437283	0.1537401	0.4912439	0.470577	0.17941	0.164752	0.19256	0.158052	0.144363	0.431208

A fenti tanulságokat levonva, a teljes rendelkezésre álló idősorra elvégeztem a becsléseket, Svensson módszerrel, kezdőértéknek választva az utolsó napon a “komplex” csoportból legjobb illeszkedést produkáló kezdőérték-vektort[14]. A kapott hozamgörbékből mintát véve az ÁKK benchmark-nak megfelelő lejáratokon (3, 6 hónap, 1, 2, 3, 5 év) és az eredményt ábrázolva kapjuk a zéró kupon hozamgörbe evolúcióját kifejező ábrát (2.5 ábra). Az ábra részletes elemzésére itt nem térek ki.

[13] A “komplex” csoporton belüli legnagyobb különbség a leghosszabb megfigyelt lejáraton (5 év) jelentkezik, de itt is mindössze 10 bp-os. A jóval érzékenyebb forwardok esetében is a leghosszabb lejáratnál a legnagyobb a különbség: kb. 60 bp-os. Ez talán még nem jelez szignifikáns különbséget, különösen arra való tekintettel, hogy a forwardok a 3 éves horizontig gyakorlatilag együtt haladnak.
[14] A hozamgörbe rekonstrukciója a teljes idősorra - a számításokat VisualBasic-ben automatizálva, Pentium 100Mhz-es gépen - kb. 6 órát vesz igénybe!

2.5 ábra

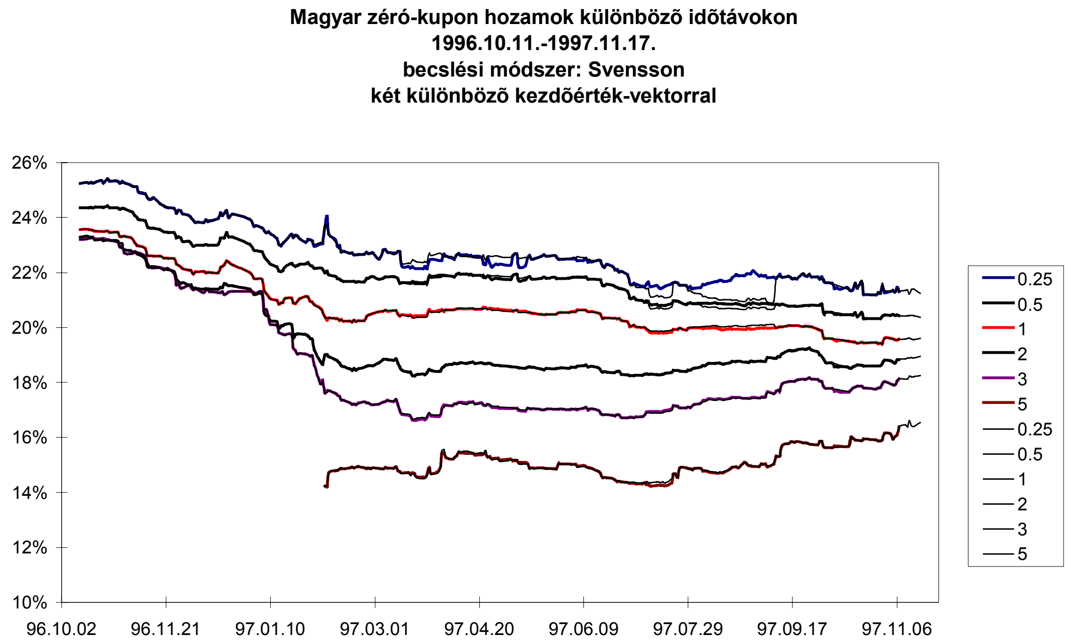


A számítások időigénye miatt a teljes időszakra vonatkozó, teljeskörű érzékenységvizsgálat még nem készült el. Mindenképpen szerettem volna azonban megerősíteni azt a korábban (egy napra végzett becslések alapján) kialakult sejtést, hogy ha az időszakra jellemző "átlagos" hozamgörbét nagy vonalakban reprezentáló kezdeti értékekről indítjuk a becslést, akkor a módszer viszonylag robusztus. Ezért az 2.5 ábrán látható becslésekhez használt kezdőérték-vektor három elemét megváltoztattam (úgy, hogy a kezdőértékek által meghatározott hozamgörbe kvalitatíve továbbra is elfogadható, azaz monoton negatív lejtésű maradjon) és újra lefuttatam a becsléseket a teljes időszakra[15]. A 2.6 ábrán folytonos vonallal az eredeti, szaggatottal az új kezdőérték-vektorral készült becslések láthatók.

2.6 ábra

[15] A két kezdőérték vektor :

2.5 ábra ("eredeti")	2.6 ábra ("új")
$\beta_0 = 0.08$	$\beta_0 = 0.05$
$\beta_1 = 0.11$	$\beta_1 = 0.15$
$\beta_2 = -0.001$	$\beta_2 = -0.001$
$\beta_3 = -0.05$	$\beta_3 = -0.05$
$\tau_1 = 5$	$\tau_1 = 5$
$\tau_2 = 0.5$	$\tau_2 = 1$



Amint az ábrából is látható, a legrövidebb - 3 hónapos - lejárattól eltekintve, ahol augusztus-szeptember során mutatkozik némi különbség, a kétféle kezdőérték-vektoron alapuló becslés eredményei között nincs jelentős eltérés. Ez az eredmény tekinthető a fenti sejtésünk egyfajta durva visszaigazolásának, azonban messze nem egyenértékű egy részletes érzékenység-vizsgálattal, melyet a jövőben mindenképp el kell majd végezni.

4. Nemzetközi összehasonlíthatóság

Két ország zéró-kupon hozamgörbéjét összevetve, bizonyos feltételek teljesülése esetén következtethetünk a különböző időtávra vonatkozó leértékelési várakozásokra. Fontos azonban, hogy az összevetésre kerülő hozamgörbék valóban kompatibilisek - lehetőleg ugyanazzal a módszerrel kalkuláltak - legyenek. Ebből a szempontból egyértelműnek tűnik a Svensson módszerrel becsült hozamgörbe előnye. Ahogy az a dolgozat végén található Mellékletből látszik, a fejlett országok jegybankjainak jó részében evvel a módszerrel történik a zéró-kupon hozamgörbe becslése.

2.5 A javasolt módszer

A fentiek alapján a Svensson módszerrel történő, napi rendszerességű zéró-kupon hozamgörbe becslést javaslom bevezetni az MNB-n belül. Véleményem szerint a legfontosabb választási szempont az, hogy a monetáris politika számára elsődleges fontosságú implikált forwardgörbe alakja plauzibilis legyen, amit a polinomiális és spline becslések nem biztosítanak. Az, hogy a kompakt függvényformákkal becsült hozamgörbe nem egyértelmű (non-unique) a gyakorlatban valószínűleg nem okoz problémát. A kompakt függvényformákon belül a Svensson módszer komplexebb term structure-t is képes leírni, mint az egyszerűbb Nelson-Siegel módszer. A komplexebb függvényalak használata a magyar zéró-kupon görbe esetében indokoltnak tűnik, bár ennek eldöntése még további vizsgálódást igényel. A Svensson módszer további előnyeként hozható fel széleskörű elterjedtsége a külföldi jegybankok körében.

3. Alkalmazás: Torzítás az ÁKK benchmark hozamgörbébben

Összefoglalás

A lejáratig számított hozamok (YTM-ek) alapján számított “hozamgörbék” nem a piac által az egyes lejáratokra alkalmazott diszkontfaktorokat tartalmazzák, hanem ezek komplex átlagait. Emiatt az YTM-görbék általában torzítanak. Ez a torzítás csak abban az esetben nem jelentős, ha a valódi (de közvetlenül meg nem figyelhető) hozamgörbe közel vízszintes. Amennyiben ez a feltétel nem teljesül, a torzítás tendenciózus lesz: pozitív meredekségű valódi (zéró-kupon) hozamgörbe esetén az YTM hozamok alacsonyabbak, negatív meredekségű (inverz) hozamgörbe esetén magasabbak lesznek, mint az ugyanazon lejáratra elvárt zéró-kupon hozamok.
Mivel a magyar hozamgörbe 1997 során változó mértékben, de kétségkívül inverz volt, az “ÁKK benchmark” hozamgörbe - amelyet 6 reprezentatív lejárathoz tartozó YTM-ek alapján állítanak össze - felfelé torzított. Az alábbi dolgozat célja ezen torzítás számszerűsítése. Erre korábban nem volt lehetőség, mivel nem álltak rendelkezésre az összehasonlítás alapjául szolgáló, valódi elvárt hozamokat tükröző zéró-kupon hozamgörbék. Nemrég azonban befejeződött a napi zéró kupon hozamgörbék 1996 októberétől 1997 végéig történő visszamenőleges becslése, az ún. Svensson módszerrel. Ez alapján már képet kaphatunk az ÁKK benchmarkban lévő - régóta sejtett, de nem számszerűsített - torzításról.
Az eredmények szerint, az aki az ÁKK benchmark hozamok alapján egy egyszerű módszerrel (időben konstans reálkamat és lejárati prémium, ld. alább) próbált durva becslést adni különböző időtávra vonatkozó inflációs várakozásokra, az 1 és 2 év múlva várt éves inflációt átlagosan kb. 50 bázisponttal, a 3 és 4 év múlva várt éves inflációt pedig átlagosan 160-180 bázisponttal becsülte felül a vizsgált időszakban.

*

Az 1.2 részben már szó esett az YTM-hozamgörbék elméleti hátrányairól általában. A következőkben az ilyen típusú hozamgörbékben megjelenő tendenciózus torzítások forrásait részletesebben vesszük szemügyre, melyhez az 1 fejezetben található képleteket használjuk.
A (1.2)-t az (1.1) képlettel összehasonlítva látható, hogy az egyes tagok nevezőiben ezúttal mindenütt ugyanaz a hozam ***y(m)*** szerepel, azaz ***y(m)*** egy komplex átlaga a kötvény árazásához használt ***i(t), t=1,..,m*** zéró-kupon hozamoknak. Könnyen belátható, hogy amennyiben a zéró kupon hozamgörbe pozitív vagy negatív meredekségű, az ***m*** lejáratú kötvény lejáratig számított hozama, ***y(m)***, tendenciózusan el fog térni az ***m*** lejárathoz tartozó ***i(m)*** zéró-kupon hozamtól. Pozitív meredekségű zéró-kupon görbe esetén az átlagot reprezentáló ***y(m)*** kisebb lesz, mint a zéró-kupon hozamok ***m*** szerint növekvő sorozatának utolsó tagja, ***i(m),*** míg negatív meredekség esetén fordítva, ***y(m) > i(m).*** A torzítás annál nagyobb, minél meredekebb a hozamgörbe (abszolút értékben), minél hosszabb lejáratokat hasonlítunk össze (azaz minél nagyobb ***m***) ill. minél nagyobb az ***y(m)*** kiszámításához használt kötvény névleges kamata (***C***). A helyzetet komplikálhatja, ha a zéró-kupon görbe nem monoton, azaz ha negatív és pozitív lejtésű szakaszok egyaránt találhatók benne.

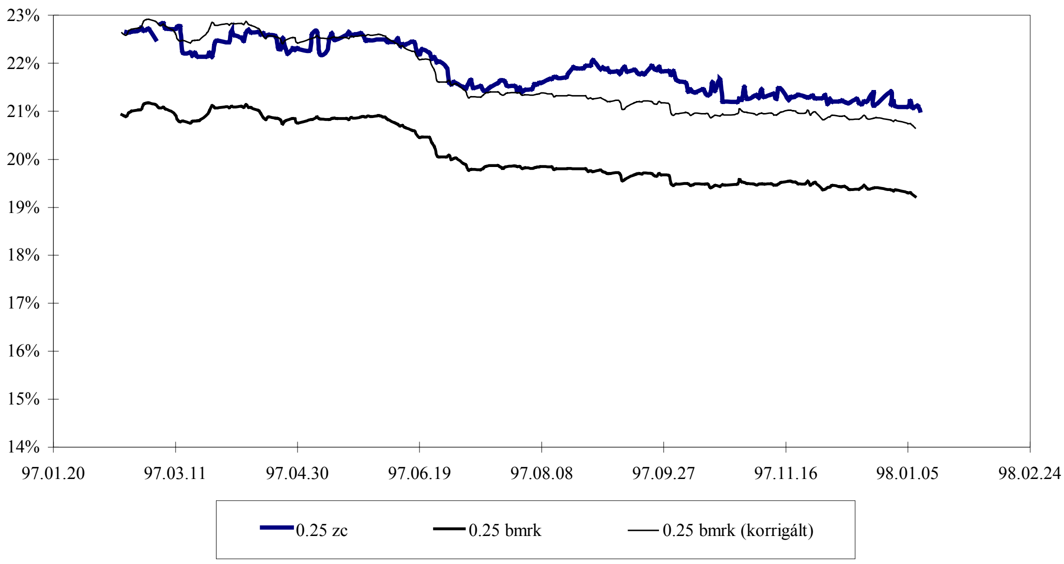
Monoton zéró-kupon görbe esetén (1997-ben ilyen volt a magyar zéró-kupon görbe) viszont a torzítás ténye és iránya egyértelműen megállapítható.
Az YTM-görbével kapcsolatos második elméleti kritika alapja az a tény, hogy azonos lejáratú kötvények közül a magasabb névleges kamatot fizető kötvénynek nagyobb a lejáratig számított hozama (ez az ún. kupon-hatás). Emiatt az elméletileg helyes megoldás az lenne, ha a névleges kamatozás minden szintjéhez külön YTM-hozamgörbét számítanánk. A gyakorlatban ez persze problémát okoz, hiszen a piacon sokféle névleges kamat fordul elő, így egy-egy YTM-görbe becsléséhez kevés megfigyelés akadna. Különböző névleges kamatozású kötvények hozamaiból szerkesztett (és a fenti okból inkonzisztens) YTM-görbe esetén a legnyilvánvalóbb problémát az jelentené, hogy az egyes lejáratokhoz így esetleg több elvárt hozam is tartozna, és nem lenne egyértelmű, melyiket tartsuk az adott lejáratra a piac által elvárt hozamnak. Ez a probléma a magyar adatok esetében is felmerül, hiszen a kötelező árjegyzésben szereplő államkötvények névleges kamatai jelenleg széles, 14-24%-ig terjedő skálán szóródnak.
Az ÁKK benchmark - amellett, hogy rendelkezik az YTM-görbékre jellemző hátrányokkal - további kellemetlen tulajdonságokkal is bír. Egyrészt mindössze hat időtávra (3 és 6 hónap, 1, 2, 3, 5 év) ad meg YTM-hozamokat, másrészt ezek a hozamok lejáratonként mindig csak egy - az adott lejárattal megegyező (kibocsátáskori) futamidejű legfrissebben kibocsátott - instrumentum lejáratig számított hozamát jelentik. Ezzel az eljárással az ÁKK benchmark a rendelkezésre álló információnak (jelenleg kb. 35 kötelező árjegyzésbe bevont instrumentum piaci ára) csak egy töredékét használja fel, másrészt ismét csak torzít: pl. előfordul, hogy ami a benchmarkban 5 éves hozamként szerepel, az valójában egy 4.5 év hátralévő futamidejű kötvény lejáratig számított hozama. Inverz hozamgörbe esetén ez a torzítás pozitív előjelű, hiszen ha rövidebb szakaszon átlagoljuk az egyre csökkenő zéró-kupon hozamokat, akkor nyilván magasabb átlagokat kapunk. A hátralévő futamidő rövidülése miatti torzítás tehát azonos irányú a fentebb említett alapvető torzítással. Az alábbiakban az ÁKK benchmarkban lévő teljes torzítás számszerűsítésére teszünk kísérletet és nem vállalkozunk ennek a fentebbi összetevőkre való bontásával[16]. További, a benchmark konstrukciójából származó probléma, hogy új - a benchmark lejárataival megegyező futamidejű - instrumentumok kibocsátásakor (pl. amikor a 4.5 év hátralévő futamidejű kötvény helyett egy újonnan kibocsátott, 5 év múlva lejáró kötvényre térnek át) jelentős ugrások fordulhatnak elő - természetesen elsősorban a ritkábban kibocsátott hosszabb lejáratok esetében. A torzítás futamidő-rövidülés miatti komponense tehát az új kibocsátásoktól függően ingadozik.
A teljes torzítás számszerűsítéséhez a Svensson-módszerrel becsült napi zéró kupon hozamgörbék benchmarknak megfelelő lejárataihoz (3 és 6 hónap, 1, 2, 3 és 5 év) tartozó hozamokat hasonlítjuk össze a benchmark hozamokkal. Az eredményeket az 3.1-3.6 ábrák tartalmazzák. A 3 és 6 hónapos benchmark hozamokat, amelyek a

[16] Érdemes azonban megnézni, mennyi volt a futamidő rövidülés miatti torzítás maximális értéke a vizsgált időszakban. Ezt viszonylag egyszerű megállapítani: a - legritkábban kibocsátott - 5 éves államkötvények kibocsátásánal napján ugyanis az 5 éves benchmark hozam ténylegesen 5 éves hozamot reprezentál. A második és harmadik 5 éves államkötvény kibocsátásakor (1997. 07. 24. ill. 1998. 01. 08.) az 5 éves benchmark hozam meglepően kis mértékben, mindössze 13 ill. 9 bp-tal esett. Mindazonáltal megfigyelhető volt a teljes torzítás jelentősebb csökkenése (kb. 50 ill 20 bp), de ez az előbbiek miatt elsősorban abból következhetett, hogy az új instrumentumok a zéró-kupon becslések eredményét is jelentősen befolyásolták. Összességében megállapíthatjuk, hogy a teljes torzításban a futamidő-rövidülés miatti komponens nem játszott jelentős szerepet.

magyarországi konvenció miatt lineáris kamatozással számolt hozamok, átalakítottam kamatos kamatozású hozammá[17], így az 1.-2. ábrák mindkét konvenció szerinti hozamot tartalmazzák.

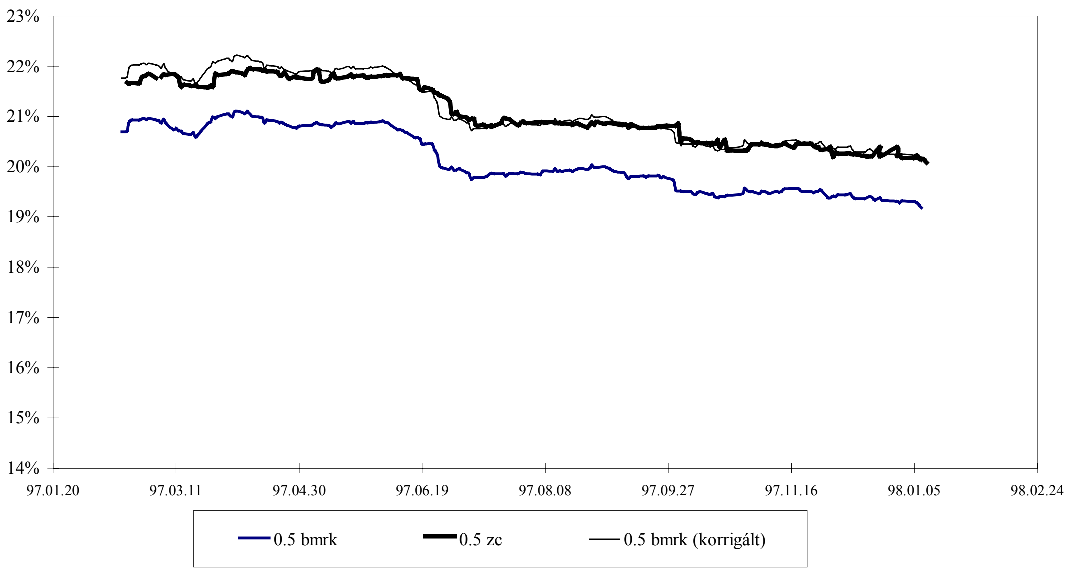
3.1ábra

3 hónapos zéró-kupon és ÁKK benchmark hozamok



3.2 ábra

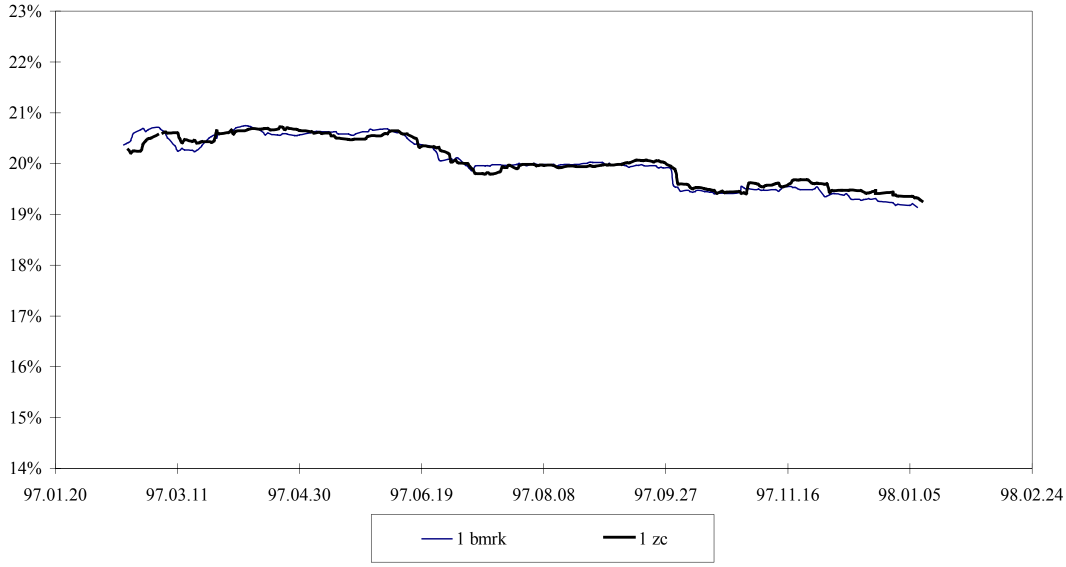
6 hónapos zéró-kupon és ÁKK benchmark hozamok



[17] Az átszámítás a következő képlettel történt: $\boldsymbol{i}_k(\boldsymbol{m}) = \left[\left(\frac{\boldsymbol{i}_l(\boldsymbol{m})}{1/\boldsymbol{m}}\right) + 1\right]^{1/\boldsymbol{m}} - 1$, ahol $\boldsymbol{m}$ a szóbanforgó lejárat (0.25 ill. 0.5) $\boldsymbol{i}_k$ a kamatos kamat $\boldsymbol{i}_l$ pedig a lineárisan számított kamat.

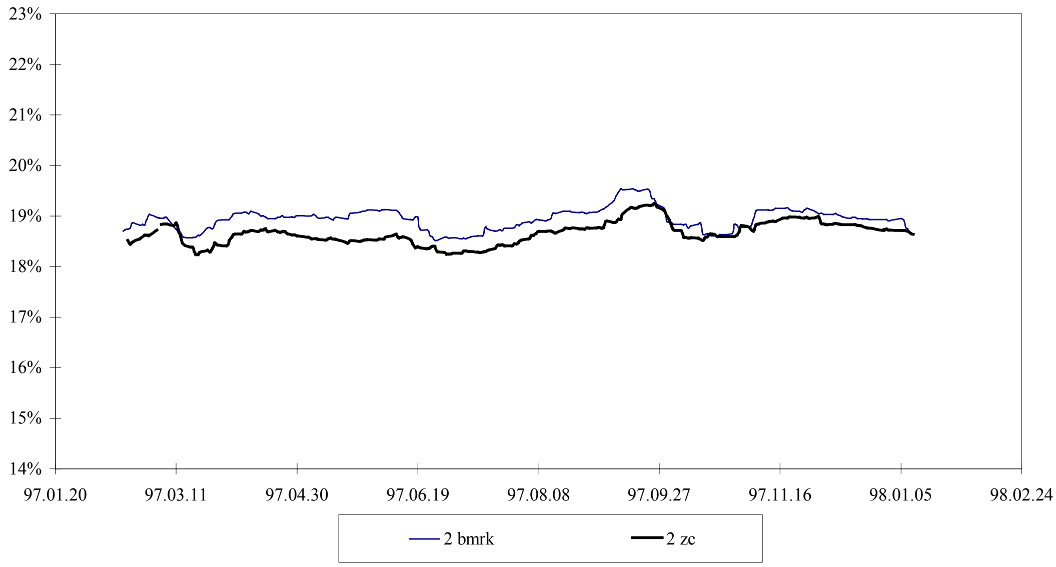
3.3 ábra

1 éves zéró-kupon és ÁKK benchmark hozamok



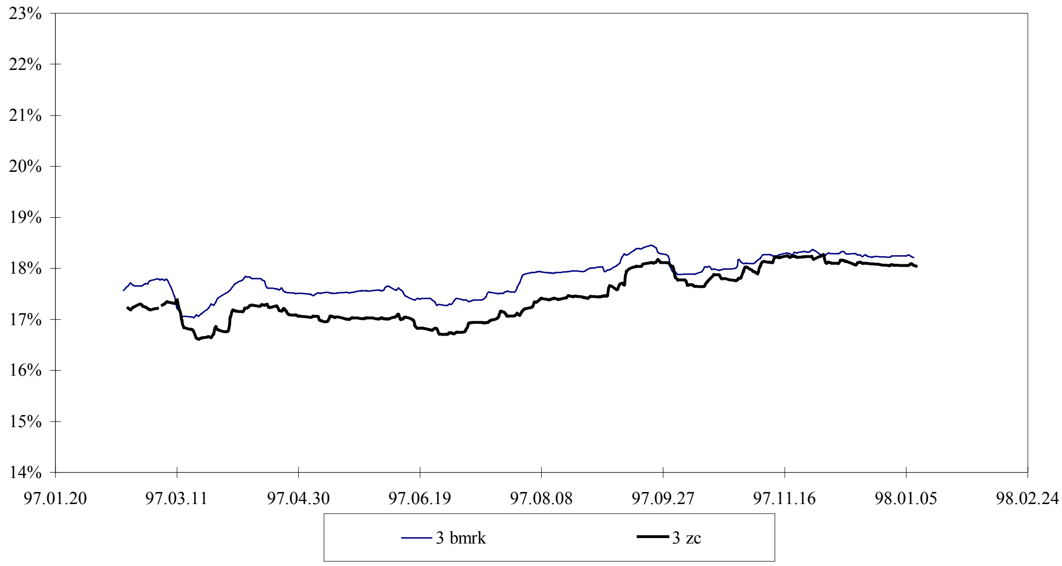
3.4 ábra

2 éves zéró-kupon és ÁKK benchmark hozamok



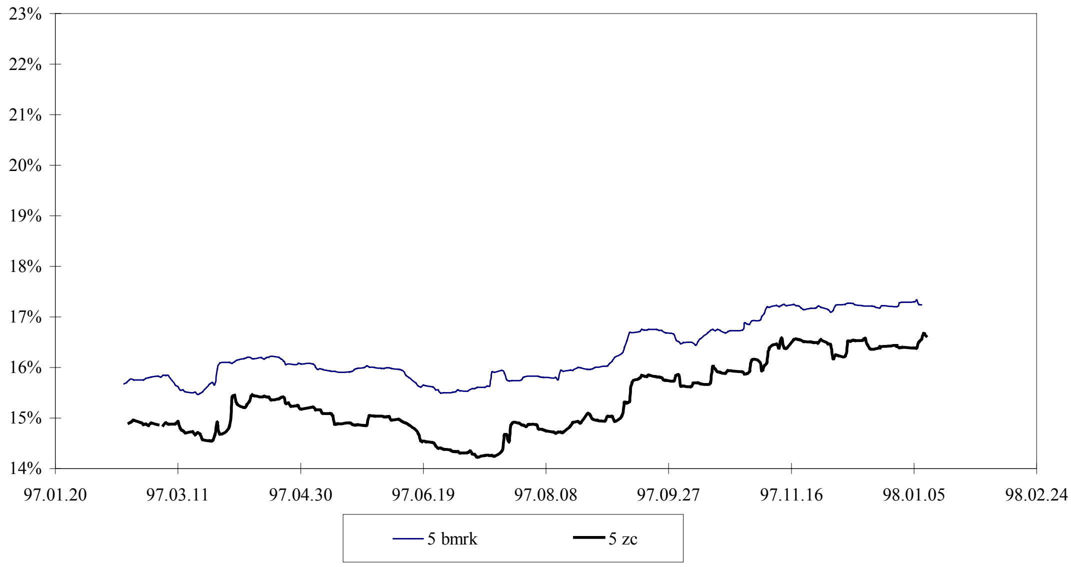
3.5 ábra

3 éves zéró-kupon és ÁKK benchmark hozamok



3.6 ábra

5 éves zéró-kupon és ÁKK benchmark hozamok



Az ábrákból jól látszik, hogy míg 3 és 6 hónapos, valamint 1 éves lejáraton a különbség nem számottevő[18], addig 2, 3 és 5 éves lejáratokon már jelentős különbségek fedezhetők fel. A bázispontban kifejezett lejáratonkénti eltérések egész idősorra vonatkozó átlagait az *3.1 táblázat* tartalmazza. Az átlagok természetesen csak óvatosan értelmezendők: amikor a hozamgörbe negatívabb lejtésű (pl. a kb. 97. június közepéig tartó szakaszon) akkor a torzítás nagyobb az átlagnál. A hozamgörbe

[18] Sőt, a 3 hónapos lejárat esetén egy szakaszon a várakozásunkkal ellentétes irányú a különbség, azaz a benchmark alatta halad a becsült zéró kupon hozamoknak.

meredekségének 97 júliusa tartó (abszolút értékben vett) csökkenése ezzel szemben mérsékelte a benchmarkban lévő torzítást, ahogy ez jól látszik pl. a 3 éves lejárat esetében.

3.1 táblázat: ÁKK benchmark és zéró-kupon hozamok átlagos eltérése a benchmarknak megfelelő időtávokon

időtáv (év)	0.25	0.5	1	2	3	5
átl. eltérés bp-ban	-2	9	2	34	49	100

A monetáris politika szempontjából kiemelkedő fontosságú inflációs várakozások durva becslésének egyfajta módja, ha a Fisher-egyenlőségből kiindulva, a reálkamatot konstansnak véve, valamint a várakozási hipotézis (időben állandó lejárati prémiummal) teljesülését feltételezve, a hozamgörbe által implikált forwardokból a reálkamatot és a (feltételezett) prémiumot egyszerűen levonjuk. Evvel az eljárással kapcsolatban számos elméleti kifogás felhozható, amelyekkel azonban ebben a dolgozatban nem foglalkozunk. Itt az a célunk, hogy bemutassuk, önmagában mekkora torzítást visz a becsült inflációs várakozásokba, ha az implikált forwardokat az ÁKK benchmark alapján számítjuk ki.

A 3.7-3.10 ábrák tartalmazzák a benchmark ill. a zéró-kupon görbe alapján kiszámított 1 éves forwardokat 1, 2, 3 és 4 év időtávon, azaz a 3.9 ábrán például a 3 év múlva kezdődő 1 éves időszakra vonatkozó várt nominális kamat[19] alakulása látható. Amint az várható volt, az implikált forwardok közötti különbségek jóval nagyobbak, mint a spot hozamok közöttiek. A fenti egyszerű módszerrel becsült inflációs várakozásokban ez a különbség természetesen teljes egészében megjelenik. A teljes idősorra vonatkozó eltérés-átlagokat a *3.2 táblázat* tartalmazza. Amennyiben tehát valaki ezzel a módszerrel és az ÁKK benchmark hozamokkal számolt, az 1 és 2 év múlva várt éves inflációt kb. 50 bázisponttal, a 3 és 4 év múlva várt inflációt pedig átlagosan 160-180 bázisponttal becsülte felül a vizsgált időszakban.

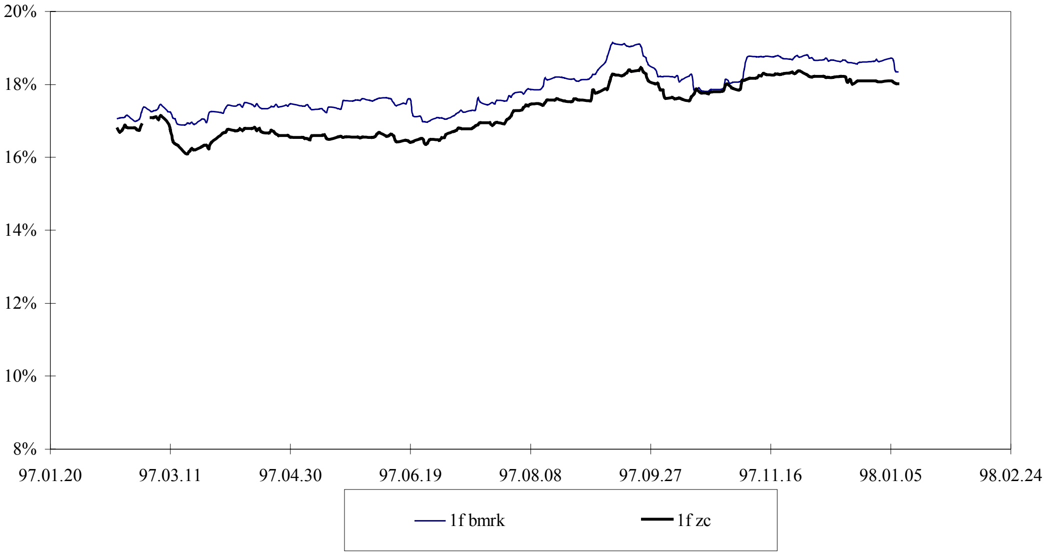
3.2 táblázat: ÁKK benchmark és zéró-kupon görbe alapján számított 1 éves implikált forwardok átlagos eltérése

időtáv (év)	1	2	3	4
átl. eltérés bp-ban	58	53	166	180

[19] Hangsúlyozni kell, hogy az implikált forwardok csak a várakozási hipotézis teljesülése esetén egyeznek meg a várt kamatokkal. Szintén megjegyzendő, hogy a benchmark lejáratai között nem szerepel a 4 év, emiatt az implikált forwardok 3 és 4 éves időtávon történő kiszámításához szükséges 4 éves spot hozam a 3 és 5 éves hozamok közötti interpolációval (számtani átlag) került meghatározásra.

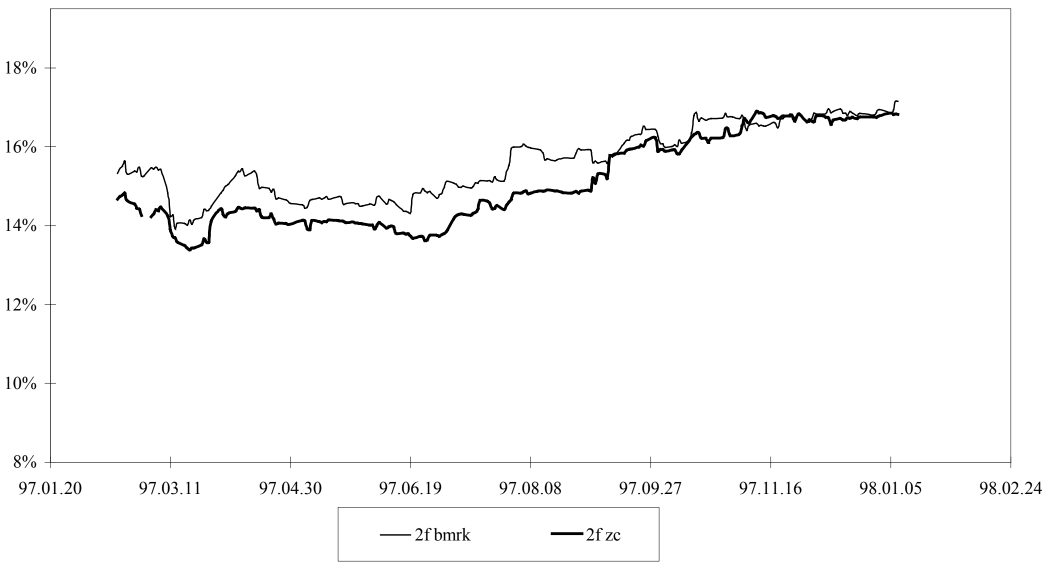
3.7ábra

1 éves implikált forwardok (1.-2. év)
zéró-kupon és ÁKK benchmark hozamgörbébõl számítva



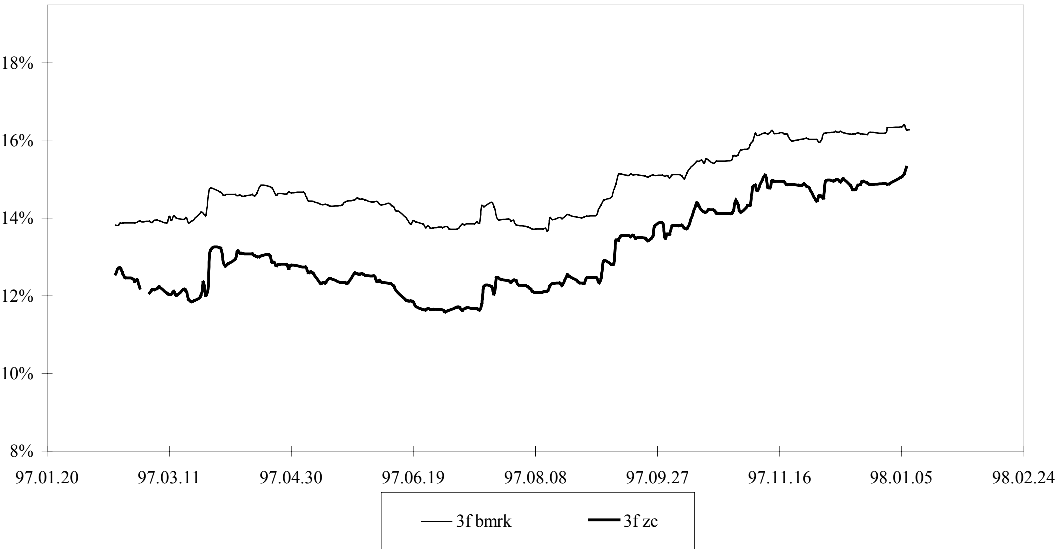
3.8 ábra

1 éves implikált forwardok (2.-3. év)
zéró-kupon és ÁKK benchmark hozamgörbébõl számítva



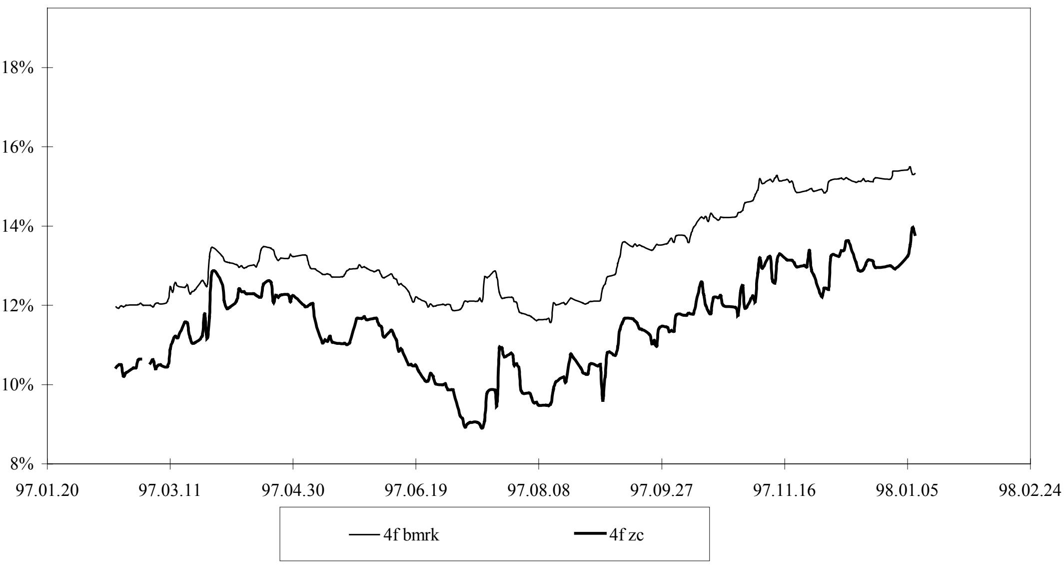
3.9 ábra

1 éves implikált forwardok (3.-4. év)
zéró-kupon és ÁKK benchmark hozamgörbébõl számítva



3.10 ábra

1 éves implikált forwardok (4.-5. év)
zéró-kupon és ÁKK benchmark hozamgörbébõl számítva



A 3.7-3.10 ábráknak azonban van egy másik irányú tanulsága is. Jól látszik ugyanis, hogy a zéró-kupon görbe alapján számított implikált forwardok jóval változékonyabbak, mint a benchmark alapján számítottak, minél hosszabb lejáratról van szó, annál inkább. Tegyük fel, hogy továbbra is a fentebbi egyszerű módszerrel próbálunk durva becslést adni az inflációs várakozásokra. Bár a szisztematikus torzítást kiküszöböli ha nem a benchmark alapján becslünk, az implikált forwardok tapasztalt változékonysága miatt célszerű a zéró-kupon hozamgörbe alapján napi rendszerességgel becsült inflációs várakozásokat valamilyen simítással (pl. mozgóátlagolás) kiegészíteni.

Melléklet: Jegybanki zéró-kupon hozamgörbe becslési módszerek a fejlett országokban

Meeting on the estimation of Zero-coupon yield curves

5th June 1996

Summary of estimation approaches

Central Bank	Estimation method[20]
Belgium	Cubic spline
Canada	Enhanced third-order polynomial (8 coefficients) (experiments with NS & ExNS)
Finland	ExNS(P)
France	• NS(P) or • ExNS(P) (restricted at short end)
Germany	Fit of polynomial through observed redemption yields (experiments with NS & ExNS)
Italy	• Cubic spline • Cox, Ingersoll & Ross one and two factor model • Swap rate yield curves
Japan	5th order spline
Netherlands	--
Norway	• Cubic spline • NS
Spain	• NS(P) • ExNS(P)
Sweden	ExNS(Y) (restricted at short end)
Switzerland	ExNS(P)
United Kingdom	ExNS(P) (adjustments for tax effects)
United States	• NS(Y) & ExNS(Y) (restricted at long end) • Smoothing splines (penalty for excess roughness)

[20] "NS=Nelson-Siegel,ExNS=extended Nelson-Siegel, estimation method minimises either yields (Y) or prices (P)." A táblázatban ExNS-sel jelölt módszer megegyezik a Svensson módszerrel. Ami a táblázatból még nem látszik: a Bundesbank 1997-ben áttért a Svensson módszerrel való becslésre.

Hivatkozások

Ireland, P. N. (1996) Long-term interest rates and inflation: a Fisherian approach, *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly*,Winter 1996, 21-35.

Lucas, R. E. (1978) Asset prices in an exchange economy, *Econometrica,* XLVI, (November), 1429-45.

McCulloch, J. H. (1971) Measuring the term structure of interest rates, *Journal of Business*, XLIV (January), 19-31.

McCulloch, J. H. (1975) The tax-adjusted yield curve, *Journal of Finance*, XXX, No. 3 (June), 811-30.

Nelson, C. R. and Siegel, A. F. (1987) Parsimonious modeling of yield curves, *Journal of Business*, 60, No. 4, 473-89.

Svensson, L. E. O. (1994) Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-94, IMF Working Paper No. 114, September.

MNB Füzetek / NBH Working Papers:

1995/1
SIMON András: Aggregált kereslet és kínálat, termelés és külkereskedelem a magyar gazdaságban 1990-1994
Aggregate Demand and Supply, Production and Foreign Trade in the Hungarian Economy, 1990-1994 (available only in Hungarian)

1995/2
NEMÉNYI Judit: A Magyar Nemzeti Bank devizaadósságán felhalmozódó árfolyamveszteség kérdései
Issues of Foreign Exchange Losses of the National Bank of Hungary (available only in Hungarian)

1995/3
DR. KUN János: Seignorage és az államadóság terhei
Seigniorage and the Burdens of Government Debt (available only in Hungarian)

1996/1
SIMON András: Az infláció tényezői 1990-1995-ben
Factors of Inflation, 1990-1995 (available only in Hungarian)

1996/2
NEMÉNYI Judit: A tőkebeáramlás, a makrogazdasági egyensúly és az eladósodási folyamat összefüggései a Magyar Nemzeti Bank eredményének alakulásával
The Influence of Capital Flows, Macroeconomic Balance and Indebtedness on the Profits of the National Bank of Hungary (available only in Hungarian)

1996/3
SIMON András: Sterilizáció, kamatpolitika az államháztartás és a fizetési mérleg
Sterilization, Interest Rate Policy, the Central Budget and the Balance of Payments (available only in Hungarian)

1996/4
DARVAS Zsolt: Kamatkülönbség és árfolyam-várakozások
Interest Rate Differentials and Exchange Rate Expectations (available only in Hungarian)

1996/5
VINCZE János – ZSOLDOS István: A fogyasztói árak struktúrája, szintje és alakulása Magyarországon 1991-1996-ban; Ökonometriai vizsgálat a részletes fogyasztói árindex alapján
The Structure, Level and Development of Consumer Prices in Hungary, 1991-1996 – An Econometric Analysis Based on the Detailed Consumer Price Index (available only in Hungarian)

1996/6
CSERMELY Ágnes: A vállalkozások banki finanszírozása Magyarországon 1991-1994
Bank Financing of Enterprises in Hungary, 1991-1994 (available only in Hungarian)

1996/7
DR. BALASSA Ákos: A vállalkozói szektor hosszú távú finanszírozásának helyzete és fejlődési irányai
The Development of Long-term Financing of the Enterprise Sector (available only in Hungarian)

1997/1
CSERMELY Ágnes: Az inflációs célkitűzés rendszere
The Inflation Targeting Framework (available only in Hungarian)

1997/2
VINCZE János: A stabilizáció hatása az árakra, és az árak és a termelés (értékesítés) közötti összefüggésekre
The Effects of Stabilization on Prices and on Relations Between Prices and Production (Sales) (available only in Hungarian)

1997/3
BARABÁS Gyula – HAMECZ István: Tőkebeáramlás, sterilizáció és pénzmennyiség
Capital Inflow, Sterilization and the Quantity of Money

1997/4
ZSOLDOS István: A lakosság megtakarítási és portfolió döntései Magyarországon 1980-1996
Savings and Portfolio Decisions of Hungarian Households, 1980-1996 (available only in Hungarian)

1997/5
ÁRVAI Zsófia: A sterilizáció és tőkebeáramlás ökonometriai elemzése
An Econometric Analysis of Capital Inflows and Sterilization (available only in Hungarian)

1997/6
ZSOLDOS István: A lakosság Divisia-pénz tartási viselkedése Magyarországon
Characteristics of Household Divisia Money in Hungary (available only in Hungarian)

1998/1
ÁRVAI Zsófia – VINCZE János: Valuták sebezhetősége: Pénzügyi válságok a '90-es években
Vulnerability of Foreign Currency: Financial Crises in the 1990s (available only in Hungarian)

1998/2
CSAJBÓK Attila: Zéró-kupon hozamgörbe becslés jegybanki szemszögből
Zero-coupon Yield Curve Estimation from a Central Bank Perspective